



# NEWSLETTER AIFIRM

RISK MANAGEMENT MAGAZINE

Rivista dell'Associazione Italiana Financial Industry Risk Managers

Anno 6, numero 4

Ottobre - Novembre - Dicembre 2011

Poste Italiane - Spedizione in abbonamento postale - 70% aut. DCB / Genova nr. 569 anno 2005



## IN QUESTO NUMERO

3	Editoriale di Maurizio Vallino e Corrado Meglio
4	Liquidity risk management senza risk managers? Osservazioni e proposte circa la normativa sul rischio di liquidità di Commissione Liquidità AIFIRM
11	Analisi critica delle metodologie di generazione di matrici di correlazione valide: Teoria e confronti nei sistemi di pricing basati sulla metodologia Monte Carlo di Pier Giuseppe Giribone e Simone Ligato (Banca Carige)
22	Come le Banche Perdonano Soldi quando i Mutui sono Rimborsati in Anticipo di Antonio Castagna (Iason)
33	La misurazione del rischio creditizio di un portafoglio di titoli governativi: l'approccio del Credit-VaR. di Chiara Andolfo

### **Newsletter AIFIRM – Risk Management Magazine**

Anno 6, n°4 Ottobre - Novembre - Dicembre 2011

#### **Direttore Responsabile:**

Maurizio Vallino (Banca Carige)

#### **Condirettore**

Corrado Meglio (Banca di Credito Popolare)

#### **Consiglio Scientifico:**

Paolo Giudici (Università di Pavia)  
Giuseppe Lusignani (Università di Bologna)  
Renato Maino (Università di Torino)  
Corrado Meglio (Banca di Credito Popolare)  
Fernando Metelli (Alba Leasing)  
Claudio Porzio (Università Parthenope)  
Gerardo Rescigno (Banca Monte dei Paschi di Siena)  
Francesco Saita (Università Bocconi)  
Paolo Testi (Banca Popolare Milano)  
Maurizio Vallino (Banca Carige)

**Vignettista:** Silvano Gaggero

#### **Proprietà, Redazione e Segreteria:**

Associazione Italiana Financial Industry Risk Managers (AIFIRM), Via Sile 18, 20139 Milano

Registrazione del Tribunale di Milano n° 629 del 10/9/2004

E-mail: [segreteria@aifirm.it](mailto:segreteria@aifirm.it);

Tel. 389 6946315

Lunedì h.10-12; da Martedì a Venerdì h.15-17

**Stampa:** Algraphy S.n.c. - Passo Ponte Carrega 62-62r  
16141 Genova

**Le opinioni espresse negli articoli impegnano unicamente la responsabilità dei rispettivi autori**

**SPEDIZIONE IN ABBONAMENTO POSTALE AI SOCI AIFIRM RESIDENTI IN ITALIA, IN REGOLA CON L'ISCRIZIONE**



## **EDITORIALE**

Carissimi lettori,  
anche nel 2011 il rischio di liquidità è stato il tema centrale del risk management con le sue implicazioni a livello bancario, e soprattutto, sulle ripercussioni negative sul costo e sulla quantità di credito disponibile per la clientela.

L'asta PCT triennale della Banca Centrale Europea di fine anno ha sicuramente contribuito a migliorare la situazione di liquidità degli Istituti di credito, attraverso il consolidamento di una parte importante del loro debito, ma permane il problema del ripristino della fiducia verso il sistema finanziario, sia per le aziende di credito che per i governi europei.

Nel 2012 andranno in scadenza circa 125 miliardi di obbligazioni emesse da banche italiane e la gestione del debito rimarrà forzatamente uno dei principali punti di attenzione nelle agende del top management.

Come accennato, a nostro avviso, solo una rinnovata fiducia negli operatori finanziari potrà consentire alle banche di riprendere, con pienezza, il proprio ruolo strategico di sostegno all'economia e di volano per lo sviluppo; riteniamo, infatti, che una sana e prudente gestione dell'azienda di credito, unitamente ad un rafforzato ruolo del sistema dei controlli interni, siano la strada da percorrere a livello aziendale e microeconomico.

AIFIRM, già da tempo, si è focalizzata sul tema del rischio di liquidità ed ha istituito una specifica Commissione per esprimere le proprie valutazioni sulla normativa emanata dalle Autorità di Vigilanza bancaria e per suggerire alcune indicazioni, volte, in particolare, a valorizzare il ruolo del risk management.

In questo numero viene pubblicato il lavoro della Commissione presieduta da Marco Berlanda, Vice Presidente AIFIRM, con l'obiettivo di condividere, all'interno della comunità finanziaria, il pensiero dell'Associazione sulle prescrizioni normative e sulle azioni di monitoraggio promosse dalle Autorità di Vigilanza.

Maurizio Vallino e Corrado Meglio

# Liquidity risk management senza risk managers? Osservazioni e proposte circa la normativa sul rischio di liquidità (Basilea 3 e Circolare n. 263)

A cura della Commissione Liquidità AIFIRM<sup>1</sup>

Con il presente documento l'Associazione Italiana Financial Industry Risk Managers (di seguito AIFIRM o Associazione) intende:

- esprimere alcune valutazioni circa la normativa emanata dalle Autorità di Vigilanza bancaria in materia di rischio di liquidità<sup>2</sup>;
- suggerire alcune revisioni della normativa, volte in particolare a valorizzare le misurazioni del *risk management*.

Il documento<sup>3</sup> ha il seguente sviluppo:

1. richiamo delle nuove previsioni normative e delle azioni di monitoraggio promosse dalle Autorità di Vigilanza;
2. rassegna delle valutazioni espresse dagli operatori e dalle associazioni di categoria, seguita da un giudizio di AIFIRM;
3. segnalazione di talune difficoltà interpretative o applicative della normativa interna;
4. proposte finali.

## 1. Gli interventi di vigilanza

Di recente la gestione del rischio di liquidità nel settore bancario è stata oggetto di interventi incisivi da parte delle Autorità di controllo:

a) nel dicembre scorso il Comitato di Basilea ha emanato definitivamente il documento *Basilea 3 – Schema internazionale per la misurazione, la regolamentazione e il monitoraggio del rischio di liquidità*. In Europa la relativa attuazione sarà affidata probabilmente a un Regolamento in corso di definizione da parte delle Autorità comunitarie, che si applicherà direttamente negli Stati membri senza meccanismi di recepimento nazionale;

b) Banca d'Italia ha integrato le proprie *Nuove disposizioni di vigilanza prudenziale per le banche*, emanate con la Circolare n. 263 del 27 dicembre 2006, mediante il 4° aggiornamento del 13 dicembre 2010. In particolare il nuovo Titolo V detta una disciplina organica in materia di "Governo e gestione del rischio di liquidità";

c) Banca d'Italia, inoltre, ha richiesto a un gruppo di banche la segnalazione regolare del proprio profilo di liquidità sulla base di modalità di misurazione definite *ad hoc*.

\* \* \*

a) Con Basilea 3 il Comitato di Basilea punta a rafforzare il profilo finanziario degli enti creditizi mediante l'introduzione di due vincoli quantitativi severi e di rigida applicazione.

Il primo standard è un requisito di equilibrio finanziario di breve termine, definito *Liquidity Coverage Ratio (LCR)*<sup>4</sup>. In relazione a tale requisito, i Gruppi bancari e le banche autonome dovranno a partire dal 2015 detenere stabilmente attività liquide prontamente mobilizzabili, di natura predeterminata dalla normativa, in misura sufficiente a fronteggiare il flusso netto finanziario in uscita, stimato entro un orizzonte temporale di 30 giorni<sup>5</sup>. Questo deflusso sarà calcolato in condizioni di severo *stress* al contempo di mercato e aziendale, anch'esso stabilito dalla normativa prudenziale (massicci prelievi sui depositi di raccolta da parte della clientela *retail e corporate*, forte riduzione delle passività a vista o in scadenza emesse a favore del

<sup>1</sup> Hanno partecipato ai lavori della Commissione: Alberto Mietto (Banco Popolare) Aldo Letizia (Banca Popolare Pugliese); Andrea Partesotti (Prometeia); Carlo Enrico De Bernardi (Banca Popolare di Milano); Carlo Frazzei (Banca Sella); Fabiano Lionetti (Banca Popolare di Vicenza); Fabio Ricci Feliziani (Monte dei Paschi); Floriana Filippini (Cassa Depositi e Prestiti); Gianluca Iacchini (UBI); Giovanni Conti (Monte dei Paschi); Marco Berlanda (Banco Popolare); Silvia Nardini (Credito Emiliano); Silvia Zanotti (IntesaSanPaolo); Stefano Tommasi (Unipol) Walter Vecchiato (Veneto Banca)

<sup>2</sup> Ci si riferisce in particolare a:

- Comitato di Basilea per la vigilanza bancaria, Basilea 3 – Schema internazionale per la misurazione, la regolamentazione e il monitoraggio del rischio di liquidità, dicembre 2010;
- Banca d'Italia, *Nuove disposizioni di vigilanza prudenziale per le banche*, Circolare n. 263 del 27 dicembre 2006 (4° aggiornamento del 13 dicembre 2010).

<sup>3</sup> Il documento è stato predisposto dalla Commissione tecnica sul rischio di liquidità costituita in seno all'Associazione e successivamente approvato dal Consiglio dell'Associazione stessa.

Sono graditi commenti e osservazioni, che, con il consenso degli estensori, saranno pubblicati sul sito web dell'Associazione ([www.aifirm.it](http://www.aifirm.it)). A seguito alle osservazioni ricevute, il presente documento potrà eventualmente essere modificato e reso definitivo.

<sup>4</sup> L'espressione inglese è tradotta nella versione italiana di Basilea 3 con l'espressione "indice di copertura della liquidità", dove, evidentemente, il genitivo "della liquidità" è un genitivo soggettivo.

<sup>5</sup> Basilea 3 si esprime in termini di "deflussi di cassa attesi" (par. 50). La terminologia corrente nell'ambito del *risk management* porterebbe invece a esprimere lo stesso concetto in forma di "deflussi inattesi e sotto *stress*", sulla base della canonica tripartizione concettuale atteso-inatteso-sotto *stress* estremo.

mercato, sensibile aumento degli utilizzi delle linee di credito *committed* ecc.)<sup>6</sup>.

Basilea 3 introduce anche un secondo requisito, definito *Net Stable Funding Ratio (NSFR)* e che entrerà in vigore nel 2018, volto ad assicurare che, su un orizzonte di dodici mesi caratterizzati da difficoltà aziendali (non sistemiche), anch'esse definite dalla normativa, gli impieghi siano finanziati da un adeguato ammontare di liquidità stabile.

Oltre ai due requisiti, le banche dovranno comunicare alle Autorità di vigilanza informazioni in materia di *mismatch* dei flussi finanziari per scadenza contrattuale, dall'*overnight* fino a oltre cinque anni; di concentrazione della raccolta all'ingrosso; di composizione degli *asset* liquidi; e di *LCR* per valuta estera.

E' previsto anche un periodo di osservazione circa gli effetti potenziali dei nuovi requisiti, prima della loro entrata in vigore, consistente nella conduzione di due studi di impatto quantitativo (*Quantitative Impact Studies – Qis*) basati sui dati di fine 2010 e di giugno 2011 e nella segnalazione di *LCR* e *NSFR* a partire dal 1° gennaio 2012.

Come accennato, in Europa l'attuazione normativa di Basilea 3 non seguirà l'*iter* laborioso sperimentato con Basilea 2, ma sarà, così pare, affidata a un regolamento europeo dotato di efficacia diretta sugli Stati membri. Al regolamento si aggiungeranno "*binding technical standards*" emanati dall'European Banking Authority (Eba) e immediatamente applicabili.

\* \* \*

b) L'elaborazione normativa internazionale è all'origine anche delle recenti modifiche apportate da Banca d'Italia alla propria Circolare 263, volte a introdurre nell'ordinamento finanziario italiano una disciplina organica del "Governare e gestione del rischio di liquidità"<sup>7</sup>.

In questo caso l'approccio regolamentare adottato è di principio e sistematico, non di dettaglio e selettivo, come nel caso di Basilea 3. Sono infatti disciplinati, riconoscendo gradi di libertà alle banche, tutti i maggiori profili che caratterizzano il controllo aziendale del rischio di liquidità: ruolo degli Organi sociali e delle funzioni di controllo interno; fissazione di una soglia di tolleranza al rischio e di limiti operativi; misurazione analitica del rischio e conduzione di prove di *stress*; individuazione delle riserve di liquidità; predisposizione di un *Contingency funding plan*; adozione di un sistema dei prezzi di trasferimento interno dei fondi che consideri esplicitamente anche il rischio di liquidità; informativa pubblica.

La Circolare 263 è entrata in vigore immediatamente. Anche in questo caso l'approccio adottato è diverso da quello di Basilea 3-liquidità, la quale prevede un differimento dell'efficacia dei nuovi standard quantitativi di 5-8 anni e non contempla una loro applicazione graduale.

\* \* \*

c) Infine va ricordato che da oltre tre anni la Vigilanza ha richiesto a un gruppo di banche italiane, e per esse alle rispettive funzioni di Finanza, di produrre con frequenza giornaliera e settimanale alcuni schemi di rilevazione della propria posizione di liquidità a breve termine, focalizzato soprattutto sui flussi di cassa relativi a operazioni di mercato, con le Autorità centrali e comunque di elevata dimensione.

Nell'esercizio delle proprie prerogative di vigilanza, e in relazione alla necessità di un graduale avvicinamento ai *ratios* finanziari previsti da Basilea 3, Banca d'Italia ha inoltre indicato alle banche di maggiori dimensioni determinati obiettivi o vincoli di liquidità, chiedendone il rispetto, espressi come rapporto tra il saldo netto di liquidità a un mese e l'attivo di bilancio.

\* \* \*

Le tre iniziative citate sono meritorie, poiché colmano una lacuna regolamentare e vincolano le banche a comportamenti più prudenti che in passato.

Opportuna, in particolare, appare la scelta di Banca d'Italia di inserire in un contesto organico – la Circolare 263 – gli standard quantitativi previsti da Basilea 3 e, mediante il predetto monitoraggio, di anticiparne in qualche modo l'applicazione. Si consideri a quest'ultimo proposito che l'entrata in vigore di Basilea 3, molto dilazionata in ragione del fabbisogno finanziario emergente in capo a diverse banche<sup>8</sup> e della necessità di concedere tempo per coprirlo gradualmente, avrebbe lasciato per

<sup>6</sup> La normativa impone che il deflusso netto non possa essere positivo, anzi che debba essere negativo, poiché per convenzione gli afflussi non possono eccedere il 75% dei flussi in uscita. Ciò significa che lo *stock* di attività non può comunque essere inferiore (*floor*) al 25% dei deflussi finanziari. A questa stregua saranno penalizzate le banche in equilibrio finanziario o in sostanziale equilibrio, le quali, a parità di deflusso netto uguale ante *floor* a quello di altre banche in analoghe condizioni, si caratterizzeranno per *cash out* più elevati.

<sup>7</sup> Si ricordano in particolare le seguenti fonti della Circolare 263:

- Comitato di Basilea, *Principles for Sound Liquidity Risk Management and Supervision*, settembre 2008, contenenti diciassette principi cui la normativa di Banca d'Italia si ispira largamente;
- Direttiva europea 2009/111/CE del 16 settembre 2009 sugli enti creditizi, recante norme essenziali coerenti con i principi del Comitato di Basilea;
- Cebis, *Guidelines on Liquidity Buffers & Survival Periods*, dicembre 2009;
- Cebis, *Guidelines on Liquidity Cost Benefit Allocation*, ottobre 2010, relative ai tassi interni di trasferimento dei fondi.

<sup>8</sup> Il *Quantitative Impact Study* condotto dal Comitato di Basilea e pubblicato a fine 2010 mostra che l'*LCR* medio delle banche che hanno fornito dati completi ai fini della simulazione sulla liquidità (169 banche sulle 263 partecipanti al *Qis*), era attestato a fine 2009 tra l'83% (banche internazionali) e il 98% (altre banche). Il 46% delle banche raggiungeva o superava la soglia minima richiesta del 100%, mentre l'altro 54% evidenziava un *gap* complessivo di liquidità pari a 1.730 miliardi di euro (19 miliardi *pro capite*). L'indicatore *NSFR* medio,



diversi anni impresidiato il rischio di una nuova crisi di liquidità. Né Basilea 3, come già ricordato, prevede, per l'osservanza dei requisiti di liquidità, un periodo di graduale adeguamento (*phase in*) in analogia a quanto stabilito per le regole sul capitale.

Dubbi, invece, sussistono sulla coerenza fra i tre strumenti di vigilanza esaminati, su alcune scelte tecniche in essi contenute e sulla mancanza di regole transitorie comuni a livello internazionale di qui al 2015. Come viene meglio precisato nel seguito.

## 2. Valutazioni dell'industry e di AIFIRM

Il giudizio espresso dall'*industry* bancaria sulla normativa in materia di rischio di liquidità è differenziato, a seconda delle fonti regolamentari considerate.

Il documento di consultazione Basilea 3-liquidità è stato a suo tempo valutato in termini positivi per le sue finalità generali, mentre ha sollevato critiche anche aspre per l'approccio *top down* prescelto, per la metrica individuata in ordine alla stima dei rischi e per la calibrazione degli standard minimi<sup>9</sup>. Il Comitato di Basilea ha tenuto parzialmente conto dei suggerimenti ricevuti dall'*industry*, modificando in sede di finalizzazione del *framework* regolamentare la calibrazione degli scenari di *stress* e il perimetro degli *asset* considerati liquidi. Ma non ha mutato l'impostazione generale, salvo proiettare l'entrata in vigore Basilea 3 su scadenze molto differite.

La Circolare 263, a livello nazionale, ha invece incontrato giudizi più benevoli<sup>10</sup>. Positive erano state anche le precedenti valutazioni dell'*industry*<sup>11</sup> sui "Principles for Sound Liquidity Risk Management and Supervision" adottati dal Comitato di Basilea, con esclusione del previsto obbligo di trasparenza circa i profili quantitativi della liquidità, sul quale le associazioni di categoria avevano sollevato perplessità.

\* \* \*

Come accennato, la disciplina del rischio di liquidità disegnata da Basilea 3 è apparsa agli operatori e alle associazioni bancarie troppo severa e impattante sull'economia ("the cumulative financial impact represents a level of conservatism so extreme that it will harm the banking sector, banking customers, and national economies", Wells Fargo; "the proposed standards overreach the target", UBS). In particolare essa è stata giudicata:

- a) troppo rigida e prescrittiva ("one size fits all") rispetto alla varietà di situazioni che dovrebbe disciplinare e che richiederebbero maggiore flessibilità e corresponsabilizzazione degli operatori;
- b) poco *risk-based*, cioè basata su coefficienti di *run-off* della liquidità e su altri parametri stabiliti sommariamente in relazione a variabili patrimoniali anziché affidati alle stime condotte dalle banche con riferimento ai propri rischi ("JPMC recommends that the Committee take an approach similar to the Advanced Rating based approach used to calculate Basel II minimum capital requirements", JPMC; "We question whether banks can still be held responsible for their liquidity risk management under the proposed rules. [...] Our conclusion is that the only acceptable and reasonable way forward for liquidity regulation will be that supervisors will focus on banks' internal liquidity risk models in order to comprehensively and adequately measure all inherent risks", UBS; "We would suggest regulators favour a more 'internal risk management'- based approach where firms are required to assess, monitor and control their risks under guidelines from regulators", Nomura);
- c) troppo severa nella definizione degli scenari di *stress* (es. contemporaneo *downgrade* di tre *notch* di tutte le banche mondiali; tassi di *run-off* delle poste *open-ended*), ritenuti irrealistici rispetto a esperienze effettive di crisi di liquidità (così Wells Fargo riferendosi a Wachovia; "During recent market crisis, JPMC and several of its peers experienced significant deposit inflows as money remained within the system", o JPMC). In particolare, è ritenuto opinabile l'assunto del contestuale verificarsi di *stress* sistemici e idiosincratci ("This combination is very improbable", World Savings Banks Institute-European Savings Banks Group; "All banks within a system cannot simultaneously lose liquidity", Wells Fargo);
- d) non trasparente nella motivazione degli scenari di *stress* ("The Committee has provided no disclosure as to the models and rationale behind the standard stress coefficients", Algorithmics);
- e) troppo rigorosa nella perimetrazione delle attività liquide (con il rischio che i *buffer* di liquidità diventino "dead assets" e non risorse utilizzabili per fronteggiare difficoltà, anche in ragione della necessità di ridondare i *buffer* per non rischiare lo sconfinare dei requisiti) e nella mancata distinzione tra banche sistemiche e non;
- f) limitativa, al di là delle intenzioni, del processo di trasformazione delle scadenze da parte delle banche *retail*;
- g) imprudente, al di là delle intenzioni, nel prescrivere *disclosure* quantitativa su un profilo delicato come la liquidità;

rilevato sul medesimo campione, si collocava su livelli migliori, quasi allineati al minimo richiesto da Basilea 3, ma comunque con il 67% dei casi sotto il 100% per uno *shortfall* di liquidità complessivo a 12 mesi pari a 2.890 miliardi di euro.

<sup>9</sup> Si vedano i numerosi commenti ricevuti dal Comitato di Basilea a proposito della bozza di Basilea 3 al seguente indirizzo: <http://www.bis.org/publ/bcbs165/cacomments.htm>.

<sup>10</sup> Cfr. <http://www.bancaditalia.it/vigilanza/banche/documcons/consnorm/crd2/disposizioni-governo-gestione-rischio/COMMENTI-A.pdf>.

<sup>11</sup> Cfr. <http://www.bis.org/publ/bcbs138/cacomments.htm>.

- h) incentivante pratiche di *moral hazard* volte a compensare i minori redditi associati alla detenzione di elevati *stock* di liquidità;
- i) arbitraria nell'escludere in linea di principio ogni supporto da parte delle banche centrali<sup>12</sup>.

Il giudizio dell'AIFIRM sulla più recente versione di Basilea 3, che potrebbe anche non essere l'ultima in relazione agli esiti dei prossimi *Quantitative Impact Studies (Qis)*, è allineato a quello dell'*industry* bancaria. In particolare l'AIFIRM è preoccupata per:

- l'entrata in vigore di Basilea 3 troppo differita nel tempo. Sarebbe raccomandabile, viceversa, una sua applicazione graduale, onde evitare la persistenza dell'attuale vuoto normativo sul piano internazionale sino al 2015;
- l'eccessiva confidenza in requisiti minimi collegati ad alcune poste patrimoniali e non direttamente ai rischi, da cui la probabilità, soprattutto col procedere del tempo e in presenza di possibili innovazioni finanziarie, di fenomeni di sotto- o sopravvalutazione dei rischi già sperimentati in passato (rischio di inaccuratezza o di Basilea 1)<sup>13</sup>.

\* \* \*

AIFIRM conferma, invece, il giudizio positivo sulla Circolare 263 e sulla decisione della Vigilanza di richiedere alle banche – in una situazione di non attuazione di Basilea 3 – evidenza regolare del proprio profilo di liquidità.

In particolare il Titolo V della Circolare 263, recante la disciplina del "Governare e gestione del rischio di liquidità":

- si caratterizza per l'approccio organico o sistematico, per cui nessuno degli aspetti aziendali che attengono alla corretta gestione del rischio di liquidità viene trascurato (apprezzabile è anche l'inclusione della liquidità nel processo *Icaap*, pur con qualche problema di coordinamento, stante la natura patrimoniale di quest'ultimo);
- sposa un approccio equilibrato tra l'indicazione di linee-guida, la precisazione di alcuni criteri essenziali (es. tempo di sopravvivenza minimo di 30 giorni) e il riconoscimento di una certa autonomia alle banche, in una logica di incentivo alla loro responsabilizzazione su un profilo così delicato ai fini della stabilità bancaria;
- si colloca alla frontiera dell'evoluzione regolamentare, per cui le metriche di rischio sviluppate con un certo grado di autonomia dagli operatori sono ritenute credibili ai fini prudenziali solo se utilizzate intensivamente anche in tutti i processi operativi (cd. *use test*): in questo senso appare condivisibile la richiesta di integrare con la variabile del costo-rischio di liquidità i sistemi aziendali che disciplinano i tassi interni di trasferimento dei fondi.

Semmai sarebbe stato più realistico concedere al sistema bancario un anno per adeguarsi a tali norme, anziché prevedere l'applicazione immediata.

Si rinvia alle pagine successive l'analisi delle interazioni tra Basilea 3 e Circolare 263.

Anche il monitoraggio della posizione di liquidità di breve termine avviato da circa tre anni dalla Vigilanza risponde, secondo AIFIRM, a finalità condivisibili, cioè quelle di anticipare in qualche misura l'applicazione di Basilea 3. Positiva appare in particolare:

- la scelta di utilizzare, come schema di rilevazione del profilo di liquidità, una *maturity ladder* articolata su una pluralità di scadenze;
- l'inclusione delle stime della banca circa la dinamica attesa delle poste *retail* e *large corporate*, compresi i riversamenti fiscali.

AIFIRM rileva, peraltro, come lo schema di rilevazione somministrato dalla Vigilanza risponda a una metodologia che, ancorché caratterizzata da assunti ragionevoli, si distingue sia da quella prevista da Basilea 3, sia da quelle in uso presso il *risk management* e la tesoreria di molte banche<sup>14</sup>. Tale schema può quindi generare confusione agli occhi degli operatori e dei rispettivi Organi sociali, tanto più in quanto accompagnato da richieste di corrispondenti livelli minimi di liquidità che si confrontano/scontrano con i limiti adottati autonomamente dalla banca e con quelli previsti da Basilea 3, testati periodicamente in sede *Qis*.

In particolare AIFIRM giudica negativamente la scelta di affidare la compilazione dei *template* in parola, la relativa comunicazione esterna ed interna e il monitoraggio dei connessi livelli minimi stabiliti da Banca d'Italia alle strutture aziendali di Finanza, tra l'altro non immuni da conflitto di interessi rispetto alla materia in questione: tale scelta, infatti,

<sup>12</sup> Questa esclusione *a priori*, che sembra disconoscere il ruolo istituzionale di prestatrici di ultima istanza proprio delle banche centrali, ha probabilmente natura negoziale nel processo di graduale calibrazione dei requisiti minimi.

<sup>13</sup> L'obiezione, valida, per cui l'eventuale riconoscimento di modelli interni di stima del rischio di liquidità avrebbe richiesto troppo tempo, rispetto all'esigenza di regole di immediata applicazione, cade, considerati i tempi lunghi di entrata in vigore di *LCR* e *NSFR* stabiliti da Basilea 3.

<sup>14</sup> La granularità delle scadenze considerate (da un giorno a tre mesi e oltre) e l'utilizzo di previsioni interne circa i flussi commerciali avvicina i *template* alle metriche aziendali; ma l'esclusione di *roll over* delle poste in scadenza e la presenza di stime sotto *stress* li allontana da approcci di tesoreria, avvicinandoli a quelli del *risk management*; peraltro non è previsto l'utilizzo di modelli comportamentali per la stima delle poste aleatorie, tipici del *risk management*. In definitiva, pare trattarsi di un approccio ibrido. Anche la quantificazione del livello minimo richiesto, calcolato come flusso netto in rapporto all'attivo, non sembra rispondere a requisiti derivanti da modelli interni o da Basilea 3.

deresponsabilizza le strutture di *risk management* e tende a delegittimare i relativi sistemi di monitoraggio, esponendo la banca al rischio di una gestione incoerente della propria liquidità.

### 3. Difficoltà interpretative e proposte di soluzioni

Oltre a esprimere la valutazione generale dei *risk managers* italiani circa il nuovo quadro prudenziale della liquidità bancaria, AIFIRM intende affrontare e, se possibile, contribuire a risolvere alcuni specifici problemi interpretativi e applicativi della nuova normativa, a cominciare dalla Circolare 263 e dal monitoraggio attivato dalla Vigilanza, già in vigore.

Di seguito se ne offre un saggio, rinviando a successivi documenti la proposta di alcuni suggerimenti più tecnici:

- A) *ottica di misurazione del rischio*. La Circolare 263 richiede che le banche misurino "il rischio di liquidità cui sono esposte in un'ottica attuale e prospettica" (p. 7 del Titolo V). Ma non è immediatamente chiaro che cosa si intenda per "ottica attuale", dal momento che il rischio di liquidità, come in generale ogni rischio, è sempre valutato in una logica prospettica, cioè in una prospettiva futura. Se, come sembra potersi desumere dal contesto, per ottica attuale si intende una metodologia di calcolo dei *gap* derivanti dalla scadenza delle poste con *maturity* certa, anche integrati con la stima della dinamica media delle poste aleatorie (poste a vista, linee di credito, clausole di ammortamento anticipato ecc.), e per logica prospettica una metrica che stimi le manifestazioni finanziarie di queste ultime con un grado di probabilità meno favorevole alla banca, allora si potrebbe più opportunamente ridenominare, o comunque intendere, la prima nel senso di *ottica operativa* e la seconda nel senso di *ottica prudenziale*<sup>15</sup>.

La prima metrica appare identica, o per lo meno analoga a quella che informa le segnalazioni attualmente richieste dalla Vigilanza (scenario base). Essa, in altre parole, rispecchia condizioni di "normale corso degli affari (*going concern*)"<sup>16</sup> o di stabilità. Invece l'ottica prudenziale è più tipica del *risk management*, ipotizza condizioni di instabilità e in genere presiede alla calibrazione dei limiti operativi e delle riserve minime di liquidità;

- B) *scenari di stress avversi o estremi?* Risolta in questo modo – se ben si intende – la prima difficoltà interpretativa, se ne presenta una seconda, concernente la natura degli scenari avversi da considerare in sede di *stress testing*, tecnica essa pure prevista dalla Circolare 263 nella batteria degli strumenti di monitoraggio della liquidità.

In materia di *stress testing* la Circolare presenta un'accezione inconsueta di scenari avversi, i quali non devono essere basati necessariamente su "variazioni estreme ma plausibili" (come previsto per i rischi di credito e di mercato dalla stessa normativa) o su "eventi eccezionali ma plausibili" (come dispone la disciplina *Icaap*), bensì semplicemente su eventi "negativi" (p. 8) o su ipotesi "realistiche ma [...] conservative" (p. 9).

Ciò sembra consentire l'utilizzo di scenari meno gravi di quelli estremi o catastrofici. Il rinvio della Circolare agli scenari indicati a titolo esemplificativo dal Comitato di Basilea nei propri *Principles for Sound Liquidity Risk Management and Supervision*, conferma questa possibilità.

La *ratio* è probabilmente la seguente: la normativa in materia di liquidità richiede la disponibilità di risorse liquide stabili a fronte degli *stress*<sup>17</sup>, ma l'utilizzo di scenari estremi, spesso privi di conferme probabilistiche, costringerebbe le banche a detenere *buffer* elevatissimi, cioè insostenibili. Ciò non significa che non possano essere evocati anche scenari estremi da utilizzare nella valutazione del profilo di liquidità, ma in questo caso la contromisura più appropriata sembra essere rappresentata dal *Contingency Funding Plan* e non dal *buffer* stabile di liquidità.

A questa stregua si profila un'accezione e un utilizzo dello *stress testing* ai fini del governo della liquidità come tecnica complementare della stima probabilistica dei rischi, più che come modalità di *escalation* degli scenari utilizzati in sede di stima probabilistica (come spesso avviene per tipologie di rischio diverse dalla liquidità). In altre parole, lo *stress testing* della liquidità, in quanto tecnica con basi spesso meno rigorose ma più duttile delle stime statistiche, si delinea come metodologia volta a integrare le stime statistiche stesse in ordine alla valutazione del profilo di liquidità della banca in ipotesi di condizioni di instabilità, non necessariamente catastrofiche, e a quantificare il fabbisogno di riserve monetarie per fronteggiarle nonché a calibrare i corrispondenti limiti operativi.

Si tratta, secondo AIFIRM, se questa è l'interpretazione corretta, di un'impostazione condivisibile, in quanto ispirata alla prudenza e volta a promuovere l'effettivo utilizzo gestionale delle risultanze degli *stress test*, troppe volte lettera morta nella gestione bancaria.

- C) *il vincolo ferreo delle regole prudenziali*. Sciolti i due dubbi interpretativi come suggerito, la Circolare 263 si

<sup>15</sup> In quest'ultimo senso, del resto, si esprime poco oltre la stessa Circolare, laddove, ai fini dell'"individuazione del probabile andamento dei flussi finanziari", consente alle banche "la possibilità di utilizzare le ipotesi alla base delle regole *prudenziali*" (p. 7), cioè quelle (molto) prudenziali di Basilea 3, oppure laddove, "nel caso di utilizzo di metodologie interne per la stima dei flussi e deflussi di cassa attesi", impone loro di adottare "ipotesi che siano ragionevoli e *prudenti*", aggiungendo che "tali metodologie devono essere fondate e ben documentate e sottoposte ad un processo di valutazione interna da parte di una funzione appositamente incaricata" (p. 8).

<sup>16</sup> Così si esprime sempre la Circolare 263 a p. 6.

<sup>17</sup> A titolo di conferma, si colleghino le due seguenti previsioni: "Le banche detengono costantemente un ammontare di riserve di liquidità adeguato in relazione alla soglia di tolleranza al rischio prescelta" (p. 9); "La soglia di tolleranza al rischio di liquidità è intesa quale massima esposizione al rischio ritenuta sostenibile in un contesto di 'normale corso degli affari' (*going concern*) integrato da 'situazioni di stress' (*stress scenario*)" (p. 6).



conferma una normativa coerente ed efficace. Senonché la stessa Circolare prevede che la soglia di tolleranza, che gli Organi sociali della banca devono definire quale strumento di governo complessivo del rischio di liquidità, debba essere stabilita "tenendo conto delle regole prudenziali in essere" (p. 6).

Con ogni probabilità tali regole vanno individuate nei due standard minimi previsti da Basilea 3 (*LCR* e *NSFR*), che entreranno in vigore rispettivamente nel 2015 e nel 2018, nonché nei requisiti di liquidità, già operanti, stabiliti banca per banca dalla Vigilanza in forma di rapporto minimo tra saldo netto finanziario a un mese e totale dell'attivo<sup>18</sup>.

AIFIRM non discute la necessità che sia assicurata una coerenza tra la soglia di tolleranza definita dalla banca e le regole prudenziali di natura generale (Basilea 3) o individuale, ma segnala che le regole prudenziali, per come sono attualmente costruite, tendono a cancellare ogni autonomia e specificità delle banche e a svuotare, a mano a mano che se ne avvicinerà l'entrata in vigore per lo meno sulle scadenze disciplinate dalla normativa (un mese, dodici mesi ecc.), ogni diversa quantificazione dei rischi e dei corrispondenti *buffer* di liquidità da detenere, a meno che la banca voglia mantenere in vita un complesso sistema di coabitazione tra metriche interne ed esterne sulle stesse scadenze, ridondante, costoso negli oneri di allineamento e riconciliazione, e addirittura pericoloso laddove le metriche e i limiti interni, sottovalutando malauguratamente i rischi rispetto all'ottica regolamentare, consentissero una violazione dei requisiti di vigilanza<sup>19</sup>.

Si delinea con ciò, tendenzialmente, una forte interferenza e il prevalere degli approcci di vigilanza (Basilea 3 o *ratios* individuali) rispetto all'assetto flessibile della Circolare 263, che rischia di essere minato alla radice. Tonano in mente i vasi di coccio e i vasi di ferro di manzoniana memoria...

L'attenzione critica, a questo punto, torna su Basilea 3<sup>20</sup> e sull'opportunità di ripensarne l'impostazione, anche in funzione dell'esito degli studi di impatto quantitativo;

- D) *il ruolo del risk management*. Un rischio da evitare è che, nel caso in cui l'impianto di Basilea 3 fosse confermato e le banche si trovassero a gestire metriche diverse (da un lato di vigilanza, sia generali sia individuali, dall'altro proprietarie) relativamente alla liquidità, tale discrasia metodologica possa essere esasperata da scelte organizzative interne inappropriate.

L'effetto sarebbe quello già sperimentato in altre occasioni, di una situazione di incomunicabilità interna tra *owners* di diversi processi, di *reports* disomogenei diretti agli Organi di vertice e di *iter* decisionali non integrati. Per non parlare degli oneri e dei costi collegati a tale regime.

AIFIRM ritiene, al contrario, che tali inconvenienti possano essere minimizzati.

In questo senso occorre evitare che la gestione delle diverse metriche sia affidata, oltre che al *Risk management*, anche ad altre funzioni aziendali, in conflitto di interesse circa il rischio di liquidità (Finanza) o prive delle necessarie competenze specialistiche (Amministrazione). In questo senso l'unica struttura che può assicurare la gestione complessiva delle metriche (definizione metodologie, calcolo rischi, proposta dei limiti, segnalazione interna ed esterna ecc.) sul rischio di liquidità in regime di indipendenza, minimizzandone le incoerenze, valutandone le specificità e se possibile allineandole, è quella del *Risk management*.

AIFIRM ritiene che questo ruolo di riferimento del *Risk management* possa già oggi essere riconosciuto in ambito aziendale e possa nei prossimi mesi essere anche sancito, in coerenza con quanto già prevede il Titolo V della Circolare 263, in sede di revisione delle disposizioni di vigilanza in materia di sistema dei controlli interni, annunciata da Banca d'Italia.

#### 4. Proposte finali

Il titolo di questo *position paper* chiede se sia opportuno un "Liquidity risk management senza risk managers". La domanda è retorica e la risposta implicita. Essa poggia sulla convinzione che interventi prudenziali i quali astraggano dalle tecniche di *risk management* e non si giovino del coinvolgimento attivo dei *risk managers* rischiano di sopravvalutare o di sottovalutare sensibilmente i rischi di liquidità, creando distorsioni nel trattamento dei singoli operatori.

In effetti Basilea 3 non contempla la possibilità dell'utilizzo di modelli interni di natura statistica o *Judgmental*, sviluppati dal *Risk management*, ma si basa su regole convenzionali identiche nello spazio e nel tempo, applicabili per lo più meccanicamente e in misura severa, difficilmente sostenibili e di applicazione molto differita nel tempo.

Il regime di segnalazione sulla liquidità a breve termine avviato negli ultimi anni da Banca d'Italia, ancorché di per sé positivo, non valorizza i modelli di rischio interni, è potenzialmente foriero di confusione in ambito aziendale e in genere è affidato alla gestione delle funzioni aziendali di Finanza.

La Circolare 263, che ammette l'utilizzo di modelli interni ai fini della stima del rischio di liquidità e assegna un ruolo

<sup>18</sup> Il rapporto in questione viene pubblicato da Banca d'Italia, in forma aggregata, nella Relazione annuale e nel Rapporto sulla stabilità finanziaria

<sup>19</sup> Su scadenze diverse da quelle considerate dalla vigilanza le banche, invece, conservano una certa libertà di utilizzo di proprie metriche e limiti, anche se non assoluta, considerato anche in questo caso il rischio di incoerenza (intertemporale) rispetto ai requisiti di vigilanza.

<sup>20</sup> I requisiti di vigilanza stabiliti caso per caso ne sono, infatti, soltanto un'anticipazione approssimata.

significativo al *Risk management* nel processo della relativa gestione, vincola le metriche interne al rispetto dei requisiti prudenziali di Basilea 3, svuotando di fatto, almeno tendenzialmente, gran parte dell'autonomia riconosciuta alle banche e agli strumenti di *risk management*<sup>21</sup>.

A fronte di tali inconvenienti AIFIRM ritiene che vadano valutate due possibili soluzioni.

La prima, ottimale, è quella di rivedere Basilea 3, anche sulla base delle evidenze che si renderanno disponibili in esito ai *Qis* del 2011. Non si tratta di stravolgere le finalità del nuovo *framework* regolamentare, bensì di affinare alcuni aspetti del relativo impianto, di ricalibrare i requisiti quantitativi e di modificare i tempi di attuazione.

In questo senso si ritiene che possa essere in primo luogo valutata una ricalibrazione dei due *standard LCR e NSFR*, di portata complessiva analoga a quella già effettuata nel luglio 2010. D'altra parte, occorre promuovere una misurazione più accurata dei rischi sostenuti dalle banche di maggiore dimensione, cioè degli operatori che – in ipotesi di instabilità – possono condizionare il funzionamento complessivo dei sistemi finanziari. In questo senso si ritiene che i relativi sistemi interni di misurazione del rischio debbano essere assoggettati a regole minime, sottoposti a validazione da parte delle Autorità di Vigilanza e utilizzati per alimentare flussi informativi volti a consentire alle Autorità stesse di accertare l'effettivo profilo di liquidità dei maggiori operatori. Infine si raccomanda di applicare le regole di Basilea 3, così riviste, in tempi più brevi di quelli stabiliti attualmente, cui è associato un lungo e pericoloso periodo di *vacatio legis*, sulla base di un approccio graduale analogo a quello previsto da Basilea 3 per i requisiti di capitale.

La seconda opzione è di natura minimale e prevede, come già accennato, che siano concentrate in un'unica struttura aziendale le attività di misurazione, controllo e segnalazione relative a tutte le metriche previste dalla normativa prudenziale.

Infatti si tratta di:

- evitare, per ragioni di efficienza, la proliferazione di processi, procedure e risorse impegnate nell'applicazione delle predette metodologie e nelle connesse attività di quadratura, monitoraggio e segnalazione;
- minimizzare il rischio di incomunicabilità e di progressiva divaricazione tra differenti metriche in uso, rischio emerso nel recente periodo relativamente al rischio di tasso e ampiamente sperimentato sotto Basilea 1 con riguardo al rischio di credito;
- non deresponsabilizzare le strutture e le risorse di *Risk management*, disperdendo il patrimonio di competenze e autorevolezza faticosamente costruito negli ultimi anni.

Un argine a tali effetti indesiderati potrebbe appunto essere costituito dalla responsabilizzazione in via esclusiva delle strutture di *Risk management*. In questo senso le attività oggi in carico agli uffici amministrativi e alle funzioni di Finanza potrebbero essere trasferite al *Risk management*.

Questo tipo di concentrazione di responsabilità, tra l'altro, potrebbe essere valutato come opportuno anche relativamente alla misurazione delle altre tipologie di rischio, come quelli di credito, operativo, di mercato, di controparte e di tasso di interesse.

Commissione liquidità AIFIRM

---

<sup>21</sup> "By publishing prescribed run-offs the Committee could take away the incentive for institutions to set their own liquidity risk appetite. The way in which the industry will value and price different types of business (e.g. deposits, loan facilities) will also follow the regulatory approach" (RBS).

# Analisi critica delle metodologie di generazione di matrici di correlazione valide: Teoria e confronti nei sistemi di pricing basati sulla metodologia Monte Carlo

di Pier Giuseppe Giribone e Simone Ligato (Banca Carige)

## 1 Introduzione

Con il presente studio gli autori propongono un'analisi ragionata delle principali metodologie presenti in letteratura per la creazione di matrici di correlazione valide. Per ciascun approccio affrontato verranno trattate le caratteristiche, i punti di forza e di debolezza e gli ambiti di applicabilità, con particolare riferimento al pricing di strumenti finanziari valorizzati con tecnica Monte Carlo. L'articolo si suddivide in quattro sezioni principali: nella prima parte viene discusso il problema e gli ambiti in cui questo si può presentare; dopo averne definito una rigorosa formulazione matematica si affronta, nella seconda sezione, le possibili cause della formazione di queste matrici non direttamente utilizzabili. La terza parte presenta le metodologie in grado di correggerle ed infine l'ultima propone un originale approccio metodologico finalizzato all'implementazione in un sistema automatizzato di pricing.

## 2 Il problema legato alle matrici di correlazione

L'impiego di matrici di correlazione per la rappresentazione delle possibili evoluzioni future di assets soggetti ad una qualsiasi dinamica descritta da un'equazione differenziale stocastica (SDE) rappresenta un modello matematico utilizzato in molti ambiti dell'economia e della finanza.

Nel campo del pricing le opzioni basket, le strutture obbligazionarie legate all'andamento di performance di indici azionari e, generalizzando, tutti gli strumenti finanziari con sottostante un paniere di assets possono essere efficacemente valutati ricorrendo al metodo Monte Carlo. Infatti, mediante l'integrazione numerica diretta dei moti geometrici browniani diffusivi caratterizzanti il moto di ciascun sottostante azionario del derivato, si arriva ad ottenere una flessibilità massima nella specificazione delle caratteristiche del pay-off dello strumento.

Il settore del risk-management utilizza ampiamente le correlazioni per il calcolo del VaR di un portafoglio, oppure per eseguire dei stress-tests o delle analisi di sensitività, simulando scenari su un insieme di titoli, al variare dei parametri finanziari.

Anche nell'ambito econometrico l'impiego di dinamiche afferenti al settore della fisica matematica per la descrizione futura dei probabili comportamenti di un bene è molto diffuso, si cita, ad esempio, gli approcci eteroschedastici sulla volatilità (GARCH), largamente impiegati nei modelli previsionali.

Tutti questi campi di applicazione hanno la caratteristica comune di descrivere le dinamiche delle variabili finanziarie  $S$  governate da un moto stocastico esprimibile dall'equazione:

$$dS_t = b(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t \quad (1)$$

Nel caso specifico del pricing di Equity Derivatives, in accordo con la teoria di valorizzazione degli strumenti finanziari di Black-Scholes, la (1) assume un drift di  $b(S_t) = rS_t$  e una volatilità di  $\sigma(S_t) = \sigma S_t$ .

Integrando numericamente la SDE (1) al fine di generare i percorsi associati a ciascuna dinamica, diviene necessario tenere presente la correlazione esistente tra le variabili finanziarie  $S$  del sistema, con la condizione che questa struttura sia mantenuta nel tempo di evoluzione del moto seguito dal sottostante. Tale scopo viene perseguito operando matematicamente sul contributo di Wiener,  $dW_t$  e, più precisamente, nella generazione di numeri casuali impiegando la fattorizzazione di Cholesky.

Affrontando quindi il problema in un contesto ad  $n$ -dimensioni, lo scopo è quello di generare un vettore di variabili casuali gaussiane,  $\vec{X}$  che tengano conto di una struttura di correlazione, espressa dalla matrice delle varianze covarianze,  $C_{\vec{X}}$ . [5]

Sia  $\vec{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^T$  un array di variabili casuali gaussiane di media zero e varianza unitaria,  $E[\vec{Z}] = 0$ ,  $Var[\vec{Z}] = I$ , dove  $I$  denota la matrice identità.

A partire dal vettore  $\vec{Z}$ , diviene necessario derivare l'array  $\vec{X}$  da impiegare nella costruzione di  $dW_t$ .

Si assume:  $\vec{X} = L\vec{Z} \Rightarrow cov(\vec{X}, \vec{X}^T) = E[L\vec{Z}\vec{Z}^T L^T]$  con  $L$  matrice di dimensioni appropriate allo spazio vettoriale di riferimento.

Essendo  $E[\vec{Z}] = \vec{0}$  e  $\text{cov}(\vec{Z}, \vec{Z}^T) = I$  allora  $E[\vec{X}] = \vec{0}$  e  $\text{cov}(\vec{X}, \vec{X}^T) = L E[\vec{Z} \vec{Z}^T] L^T = L I L^T = L L^T$ .

Dal momento che si ha  $\text{cov}(\vec{X}, \vec{X}^T) = C_{\vec{X}}$  allora vale la relazione  $L L^T = C_{\vec{X}}$ , dalla quale si può ricavare  $L$  applicando la fattorizzazione di Cholesky.

Quindi, conoscendo la decomposizione  $L L^T$  della matrice  $C_{\vec{X}}$ , al fine di generare un vettore di numeri casuali  $\vec{X}$  correlati secondo  $C_{\vec{X}}$ , è sufficiente creare un array di variabili gaussiane random  $\vec{Z}$  e calcolarne la matrice  $\vec{X}$  mediante la moltiplicazione matriciale  $\vec{X} = L \vec{Z}$ .

Esemplificando per  $n = 2$  assets, con matrice di correlazione  $C = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$  si ottiene mediante fattorizzazione di Cholesky

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$$

Si può verificare che  $C = L L^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$

I numeri random costituenti il termine di Wiener  $dW_t$  nella (1) saranno quindi generati all'istante temporale  $t$ -esimo moltiplicando per  $L$  la coppia di variabili  $\vec{Z} = [Z_1, Z_2]$ :

$$\vec{X} = L \vec{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \rho Z_1 + Z_2 \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$$

Tale procedimento vale per qualsiasi spazio vettoriale di riferimento, ma risulta computazionalmente più oneroso soprattutto nel caso in cui il codice non sia scritto in modo vettorializzato.

Il problema legato alle matrici di correlazione sorge qualora  $C$  non sia semi-definita positiva: infatti la presenza di autovalori negativi ( $C \prec 0$ ) rende la fattorizzazione di Cholesky impossibile da attuare, in altre parole, non essendo calcolabile  $L$ , non si riescono a generare i numeri random  $\vec{X}$  associati al contributo  $dW_t$  ed in ultima analisi non si riesce ad integrare la (1). In questi casi critici è necessario correggere il dato di partenza  $C$ , modificandone i suoi elementi col fine di calcolare una nuova matrice di correlazione  $G$  il più possibile vicina all'originaria. [6]

Quanto espresso è tradotto matematicamente dal seguente problema di minimizzazione:

$$\min f_C(G) = \|C - G\|_F \quad \text{con } G \in D^n \quad (2)$$

In modo tale che gli autovalori di  $G$  siano positivi e la sua traccia sia pari alla dimensione dello spazio vettoriale:

$$G \succ= 0 \quad \text{e} \quad G_{ii} = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

Dove:

$D^n$  è lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche reali  $n \times n$ .

$f_C$  è la funzione obiettivo da ottimizzare, assunto come indice della bontà della correzione introdotta su  $C$ . Rappresenta pertanto un indicatore dello scostamento degli elementi di  $G$  rispetto a quelli di  $C$ . La misura di distanza più adatta per il problema è la norma matriciale di Frobenius o 2-norm, definita per una generica matrice  $m \times n$ :

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2}$$

I vincoli al problema (2) sono sufficienti a garantire che il risultato dell'ottimizzazione sia ancora una matrice di correlazione, ma senza autovalori negativi e quindi valida, ovvero fattorizzabile, nell'applicazione della procedura di Cholesky.

### 3 Le cause della formazione di matrici con autovalori negativi

Per loro natura, teoricamente, le matrici di correlazione non dovrebbero presentare autovalori negativi. Nella corrente pratica finanziaria questo però accade quando queste sono costruite a partire da inferenze statistiche effettuate sulle serie storiche degli assets di riferimento. Lo studio di Werner e Schöttle [2] delinea le seguenti tre principali motivazioni:

- La lunghezza dei dati disponibili nelle serie storiche sono differenti fra i vari assets sottostanti l'opzione.
- I dati costituenti le serie storiche hanno frequenze di campionamento diverse: infatti alcuni indici possono avere quotazioni giornaliere, altri settimanali ed altri ancora mensili.
- Un'ulteriore causa è data dall'interazione manuale dei valori o, in altri termini, dalla modifica dei dati per particolari esigenze. Tra le più comuni manipolazioni si cita, a titolo di esempio, l'omogeneizzazione del numero dei dati al fine di pervenire ad un'inferenza statisticamente affidabile e gli "stress - tests", impiegati dai risk managers delle istituzioni finanziarie.

Nell'esempio di pricing proposto nel paragrafo 5, la matrice di correlazione di partenza,  $C$ , è stata ricavata impiegando il modulo di calcolo di Bloomberg (CORR). Questa potrebbe essere potenzialmente non semidefinita positiva, in quanto l'info-provider è dotato di un sistema interno di omogeneizzazione dei valori presenti nelle serie storiche finalizzate a fornire inferenze statistiche più fedeli al mercato. Per ulteriori approfondimenti sulla procedura matematica adottata da Bloomberg si rimanda alla nota tecnica [11].

### 4 Le metodologie di creazione di matrici di correlazione valide

In letteratura si trovano contributi tecnici relativi al problema (2), che forniscono procedure per trovare una matrice di correlazione valida [2], [3]. Nella pratica, l'impiego di queste tecniche è ancora poco diffuso: la maggiorparte dei più famosi autori non descrivono con un sufficiente livello di approfondimento questo argomento e molti software di pricing o di calcolo del VaR non implementano routine di verifica sulla non negatività degli autovalori. [4], [5]

La mancata gestione dell'eccezione conduce inevitabilmente ad un possibile errore nel motore di integrazione, che può portare ad un blocco del software o, nel caso peggiore, a fornire output non corretti. In questa sezione dell'articolo saranno discussi gli approcci matematici, proceduralizzati in un modulo di calcolo, atti alla creazione di matrici di correlazione valide.

#### 4.1 Shrinkage Approach

La tecnica proposta da Kupiec nel 1998 [8] stima  $G$  a partire dalle matrici di correlazione  $C$  e  $C_0$ : la prima è quella originaria esistente tra gli assets con autovalori negativi, mentre la seconda, denominata target matrix (o matrice di prossimità), spesso viene posta arbitrariamente pari a  $C_0 = I$ . Restringendo il problema (2) lungo la sezione lineare che passa per  $C$  e  $C_0$ , questo si riduce alla risoluzione di:

$$\min \gamma \text{ con } \gamma \in \mathfrak{R}$$

Soggetto al vincolo: (3)

$$G(\gamma) := C + \gamma(C_0 - C) \succ= 0$$

Per la risoluzione di (3) è sufficiente impiegare un semplice algoritmo di root-finding monodimensionale, quale il noto metodo di bisezione associato ad una completa ortogonalizzazione della matrice, col fine di controllare, per ogni iterazione della procedura numerica, il raggiungimento della condizione di positività.

Nonostante Kupiec abbia proposto un approccio robusto, facilmente implementabile e correttamente funzionante per qualsiasi dimensione del problema, la sua tecnica non viene utilizzata nella pratica, poiché la dipendenza dalla artificiosa matrice target,  $C_0$  lo rende di fatto difficilmente generalizzabile.



#### 4.2 Hypersphere Decomposition

La decomposizione proposta da Jäkel e Rebonato nel 1999 [1] si basa sul concetto che per un'appropriata matrice  $B$ , definita in coordinate sferiche secondo (4), una valida approssimazione di  $C$  può essere fornita da  $BB^T$ .

$$b_{i,j}(\Theta) := \begin{cases} \cos(\Theta_{i,j}) \prod_{k=1}^{j-1} \sin(\Theta_{i,k}) & \text{per } j < n \\ \prod_{k=1}^{j-1} \sin(\Theta_{i,k}) & \text{per } j = n \end{cases} \quad (4)$$

Essendo  $BB^T$  semidefinita positiva ed avendo tutti gli elementi sulla diagonale principale pari a 1, il problema (2) può essere riscritto nella forma semplificata:

$$\min \|G - C\|_F^2 = \|G(\Theta) - C\|_F^2 = \|B(\Theta)B(\Theta)^T - C\|_F^2 \quad \text{con } \Theta \in \mathfrak{R}^{n \times n-1} \quad (5)$$

Il problema di minimizzazione svincolata (5), può essere risolto ricorrendo ad un algoritmo di ricerca locale delle soluzioni, quale lo steepest-descent o il metodo quasi-newtoniano L-BFGS.

Inoltre non è generalmente necessario ricorrere a metaeuristiche di ricerca globale dell'ottimo, a meno che la dimensione di (5) sia  $n \gg 10$ , occorrenza difficilmente riscontrabile nella pratica.

#### 4.3 Spectral Decomposition

Questo tipo di decomposizione, sempre affrontata nel paper di Jäkel e Rebonato [1], si basa sulle seguenti tre osservazioni:

A) Sia  $Y \in D^n$  una matrice diagonale, allora  $Y^+$ , definita  $(Y^+)_{i,i} := \max(Y_{i,i}, 0)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , è la proiezione di  $Y$  sul cono  $D_+^n$  e risolve  $\min \|G - Y\|_F^2$  con  $G \in D_+^n$ .

Questa caratterizzazione può essere estesa ad una qualsiasi generica matrice in  $D^n$ , utilizzando la proprietà che ciascuna matrice reale simmetrica,  $A \in D^n$  ha una decomposizione spettrale  $A = U\Gamma U^T$  con  $U \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  matrice ortogonale degli autovettori e  $\Gamma \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  matrice diagonale degli autovalori.

B) Sia inoltre  $A \in D^n$  con  $A \notin D_+^n$ , allora il problema di ottimizzazione  $\min \|G - A\|_F^2$  è risolto da  $G^* = A^+$ , dove  $A^+$  è definita tramite la sua decomposizione,  $A^+ := U\Gamma^+ U^T$ . In questo senso,  $A^+$  può essere vista come la proiezione di  $A$  su  $D_+^n$ . Questo comporta che  $(A^+)_{i,i} \geq A_{i,i}$  per  $i = 1, \dots, n$ .

Questa asserzione può essere verificata usando l'invarianza della traccia rispetto alla trasformazione ortogonale e notando che  $A^+ \succ = A \Rightarrow (A^+)_{i,i} \geq A_{i,i}$ .

Confrontando il problema (2) con quello appena ricavato, si nota che l'unica differenza risiede nell'aggiunta del vincolo:  $G_{i,i} = 1$ . Al fine di tenerne debitamente conto, la proiezione necessita di essere lievemente adattata.

C) Sia  $A \in D^n$ ,  $A_{i,i} > 0$  allora si può definire una matrice diagonale scalata,  $F = F(A)$  con  $F_{i,i} := (A_{i,i})^{-1/2}$ .

Le definizioni e gli enunciati A), B) e C) conducono al seguente teorema base dell'algoritmo:

Sia  $C \in D^n$  con  $C \notin D_+^n$  e  $C_{i,i} = 1$  allora la matrice  $C^{++}$  definita come  $C^{++} := F(C^+) \cdot C^+ \cdot F(C^+)$  è una soluzione ammissibile per il problema (2), ovvero  $C^{++} \in D_+^n$  e  $C_{i,i}^{++} = 1$ .

Si noti che generalmente questa matrice  $C^{++}$  non è necessariamente un soluzione ottima per (2), ma costituisce un sub-ottimo che, in ogni caso, si dimostra essere un'approssimazione molto buona di  $G$ .

#### 4.4 Semidefinite Programming - SDP

A differenza delle altre tecniche che affrontano l'ottimizzazione (2) in modo approssimato, in quanto lo riconducono a forme più semplici e computazionalmente meno onerose, l'approccio SDP risolve direttamente il problema impiegando tecniche proprie della ricerca operativa [7]. Oltre a fornire una correzione della matrice di correlazione  $C$  più vicina possibile alla formulazione matematica originaria, permette una maggiore flessibilità nella definizione dei vincoli della minimizzazione, rispecchiando maggiormente le esigenze dell'utente.

### 5 Implementazione delle metodologie in un sistema automatizzato di pricing e relativa analisi

Le tecniche descritte nel paragrafo precedente sono state integrate dagli A. A. in un sistema di valorizzazione basato sul framework Monte Carlo di Matfin, Add-In di Excel sviluppato dal Middle-Office CARIGE in ambiente Matlab [10]. Viene di seguito riportata una sintetica descrizione dei blocchi funzionali costituenti la sua architettura:

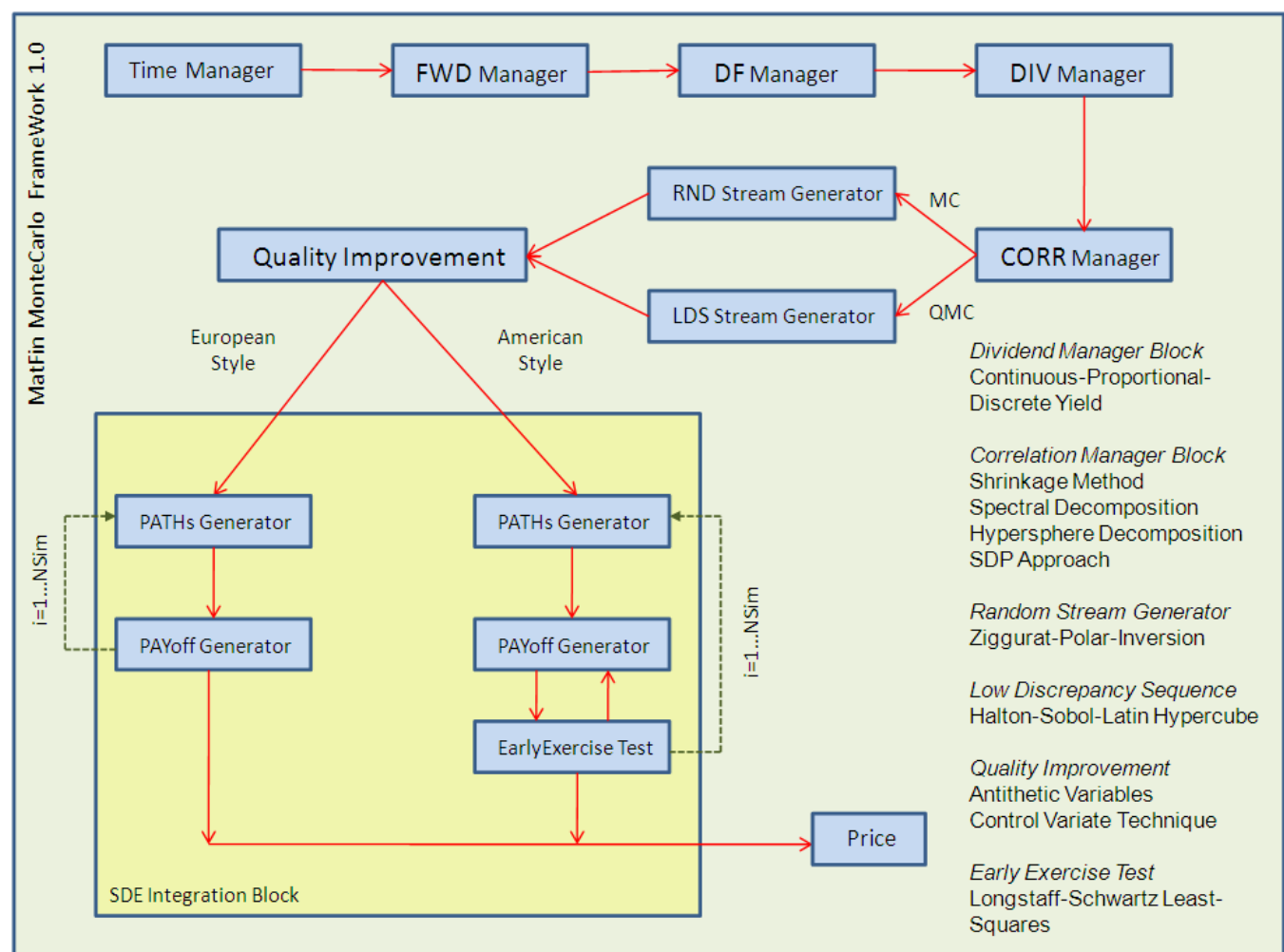


Figura 1. Architettura del frame-work Monte Carlo di Matfin

*Time Manager* discretizza gli intervalli temporali della SDE (1), generando i  $\Delta t$  del moto geometrico browniano.

*FWD Manager* genera i tassi forward costituenti i drift dell'equazione (1),  $r$ .

*DF Manager* calcola i fattori di sconto necessari per l'attualizzazione dei flussi di cassa simulati futuri.

*DIV Manager* gestisce gli eventuali dividendi staccati dai sottostanti scritti sull'opzione che si desidera valorizzare.

*CORR Manager* verifica che la matrice di correlazione sia semidefinita positiva e ne corregge gli eventuali autovalori negativi

*RND Stream Generator* crea i numeri casuali normalmente distribuiti per Monte Carlo e definisce il termine di Wiener  $dW_t$

*LDS Stream Generator* fornisce i numeri distribuiti normalmente generati da sequenze a bassa discrepanza (LDS).

*Quality Improvement* implementa le tecniche di riduzione della varianza per ottenere una più rapida convergenza sul prezzo

*PATHs Generator* integra numericamente l'equazione differenziale stocastica (1)

*PAYoff Generator* interpreta la sintassi del Pay-Off caratterizzante l'opzione impiegando un apposito meta-linguaggio.

*Early Exercise Test* verifica la convenienza di esercitare anticipatamente il diritto acquisito da un'opzione di stile americano.

*Price* esegue ed attualizza la media dei Pay-Off ricavati dal blocco integratore per ottenere il fair-value del derivato.

In questa sede si analizzerà il blocco *CORR Manager* in cui sono state implementate le tecniche di verifica e generazione di matrici di correlazione valide per la fattorizzazione di Cholesky proponendosi di verificare se l'array possiede i requisiti necessari per essere correttamente processato nello *SDE Integration Block*. Se tutti i suoi autovalori risultano positivi o nulli non vengono richiamate procedure di correzione, altrimenti il dato viene modificato e reso idoneo ad essere elaborato.

Tali metodologie sono state validate su un'opzione di tipo Equity Basket, con durata pari a 6 anni, che prevede il pagamento di una cedola in caso del verificarsi dell'evento previsto dal contratto e di una cedola finale legata all'andamento del paniere sottostante.

In particolare l'opzione prevede il pagamento di una cedola fissa così strutturata:

6% il primo anno, 4.5% per gli anni 2 - 4 se tutti e tre indici sottostanti (Nikkei225, FTSE Xinhua China25 e MSCI Taiwan) alle date di rilevazioni annuali sono maggiori o uguali allo strike fissato alla data di inizio dell'opzione.

A scadenza l'opzione pagherà una cedola pari al 65% della media aritmetica semplice della variazione media percentuale dei tre indici di riferimento rilevata con cadenza trimestrale rispetto al valore iniziale, cui andrà sottratto l'ammontare complessivo delle cedole annuali pagate.

Esprimendo in termini numerici :

$$Cedola\ Finale = \max \left[ 0\%; 65\% \frac{Var\%_1 + Var\%_2 + \dots + Var\%_{24}}{24} - \sum_{y=1}^5 Coupon_y \right]$$

Dove:

$Var\%_j$  indica la media delle variazioni percentuali del valore dei tre indici rilevato ad ogni data di osservazione rispetto al valore finale:

$$Var\%_j = \frac{1}{3} \cdot \frac{Indice_j^i - Indice_0^i}{Indice_0^i} \text{ per } j = 1, 2, \dots, 24 \text{ e } j = 1, 2, 3$$

e  $\sum_{y=1}^5 Coupon_y$  rappresenta l'ammontare complessivo delle cedole annuali corrisposte.

Per la valutazione effettuata il 23 giugno 2011, sono stati utilizzati i seguenti dati di input:

Montecarlo Parameters	
<i>Valuation Date</i>	23-giu-11
<i>Pay-Out Yield Curve</i>	EUR
<i>Random Number Generator</i>	Polar
<i>Number of Simulation</i>	50000
<i>Variance Reduction Techniques</i>	Control Variates

Figura 2. Tabella dei parametri del simulatore Monte Carlo

Interest Rates				
	<i>Euro</i>	<i>JPY</i>	<i>HKD</i>	<i>TWY</i>
<i>Overnight</i>	1,0600	0,0100	0,0100	0,5306
<i>Tomnext</i>	1,0600	0,0100	0,0100	0,5306
<i>1 Week</i>	0,8900	0,0500	0,0100	0,5306
<i>1 Month</i>	1,0300	0,3000	0,0400	0,7273
<i>3 Months</i>	1,3400	0,1000	0,1800	0,8079
<i>6 Months</i>	1,6300	0,2500	0,1300	0,9123
<i>9 Months</i>	1,8800	0,3400	0,3100	1,0583
<i>1 Year</i>	1,9630	0,3500	0,4200	0,9200
<i>2 Years</i>	2,2680	0,3550	0,6200	1,0450
<i>3 Years</i>	2,4920	0,3930	1,0700	1,1850
<i>4 Years</i>	2,6870	0,4560	1,5000	1,2800
<i>5 Years</i>	2,8540	0,5420	1,8800	****
<i>6 Years</i>	2,9960	0,6510	****	****
<i>7 Years</i>	3,1140	0,7760	2,4100	1,5700
<i>8 Years</i>	3,2140	0,9090	****	****
<i>9 Years</i>	3,3030	1,0390	****	****
<i>10 Years</i>	3,3840	1,1610	2,8700	1,7000

Figura 3. Curve prive di rischio impiegate per il pricing dell'opzione Basket

Correlation Matrix						
	<i>Hong kong \$</i>	<i>Taiwanese \$</i>	<i>Japanese Yen</i>	<i>Nikkei 225</i>	<i>Tamsci Taiwan</i>	<i>Ftse China 25 IDX</i>
<i>Hong kong \$</i>	1	0,555	0,48	-0,002	-0,897	-0,008
<i>Taiwanese \$</i>	0,555	1	0,587	0,212	-0,843	-0,038
<i>Japanese Yen</i>	0,48	0,587	1	-0,447	-0,507	0,005
<i>Nikkei 225</i>	-0,002	0,212	-0,447	1	0,372	0,012
<i>Tamsci Taiwan</i>	-0,897	-0,843	-0,507	0,372	1	0,04
<i>Ftse China 25 IDX</i>	-0,008	-0,038	0,005	0,012	0,04	1

Figura 4. Matrice di correlazione degli assets ricavata dal mercato e non definita positiva, C

Asset Data						
Asset	Hong kong \$	Taiwanese \$	Japanese Yen	Nikkey 225	Tamsci Taiwan	Ftse China 25 IDX
Asset Type	Currency	Currency	Currency	Equity	Equity	Equity
Asset Price	0,09	0,02	0,88	9.596,74	302,73	18.176,14
Volatility	12,07%	10,36%	15,23%	22,91%	14,75%	21,94%
Continuous Dividends				1,91%	5,75%	2,68%

Figura 5. Caratteristiche dei sottostanti su cui l'opzione è scritta derivati da Bloomberg alla data di valutazione

Past Prices						
Event - Date	Hong kong \$	Taiwanese \$	Japanese Yen	Nikkey 225	Tamsci Taiwan	Ftse China 25 IDX
03-ago-06	0,101	0,024	0,007	15.470,370	266,350	11.623,940
27-ott-06	0,101	0,024	0,007	16.669,070	293,500	12.466,310
27-gen-07	0,099	0,023	0,006	17.470,460	315,140	15.703,520
27-apr-07	0,094	0,022	0,006	17.400,410	315,870	16.256,810
27-lug-07	0,094	0,022	0,006	17.283,810	352,130	20.208,120
<b>03-ago-07</b>	0,093	0,022	0,006	16.979,860	350,850	20.054,930
27-ott-07	0,090	0,021	0,006	16.698,080	384,450	30.849,380
27-gen-08	0,087	0,021	0,006	13.087,910	292,730	21.524,710
27-apr-08	0,082	0,021	0,006	13.894,370	350,270	23.196,250
27-lug-08	0,081	0,021	0,006	13.353,780	267,630	19.949,140
<b>28-lug-08</b>	0,08	0,00	0,00	13.353,78	267,63	19.949,10
<b>04-ago-08</b>	0,08	0,02	0,01	12.933,18	268,11	19.868,95
27-ott-08	0,10	0,02	0,01	7.162,90	165,57	8.378,35
27-gen-09	0,10	0,02	0,01	8.061,07	160,57	11.107,30
27-apr-09	0,10	0,02	0,01	8.726,34	209,18	13.509,15
<b>27-lug-09</b>	0,09	0,02	0,01	10.088,66	256,75	18.603,54
<b>03-ago-09</b>	0,09	0,02	0,01	10.352,47	256,61	18.810,62
27-ott-09	0,09	0,02	0,01	10.212,46	278,17	19.479,81
27-gen-10	0,09	0,02	0,01	10.252,08	274,21	16.949,01
27-apr-10	0,10	0,02	0,01	11.212,66	291,71	18.426,84
<b>27-lug-10</b>	0,10	0,02	0,01	9.496,85	275,84	18.093,12
<b>03-ago-10</b>	0,10	0,02	0,01	9.694,01	283,20	18.358,50
27-ott-10	0,09	0,02	0,01	9.387,03	292,57	19.784,47
27-gen-11	0,09	0,03	0,01	10.478,66	326,07	19.172,98
27-apr-11	0,09	0,02	0,01	9.691,84	320,98	20.115,40
<b>13-lug-11</b>						
<b>03-ago-11</b>						
27-ott-11						
27-gen-12						
27-apr-12						
27-lug-12						
<b>03-ago-12</b>						

Figura 6. Rilevazioni storiche degli indici che concorrono alla definizione del Coupon Finale del derivato.

Nota: Le date in blu rappresentano le rilevazioni valide per il calcolo delle cedole intermedie, mentre quelle riportate in grassetto rappresentano le date di stacco cedola.



Gli autovalori della matrice di correlazione  $C$  risultano i seguenti: [-0.175, 0.3276, 0.5861, 1.0008, 1.2573, 3.0033]. Si può osservare la presenza di un autovalore negativo, per cui l'array non risulta valido per la procedura.

Si è ricavata  $G$  impiegando gli algoritmi descritti nel paragrafo 3 dell'articolo, ottenendo le seguenti matrici corrette:

$G_{Shrinkage}$  normalizzata con  $C_0 = I$

1	0,864792292	0,844766174	-0,729701353	-0,867348807	-0,504931896
0,864792292	1	0,837539637	-0,704245464	-0,863161699	-0,5448316
0,844766174	0,8375396370	1	-0,812145019	-0,854623903	-0,449777809
-0,729701353	-0,704245464	-0,812145019	1	0,753029256	0,21485375
-0,867348807	-0,863161699	-0,854623903	0,753029256	1	0,487261438
-0,504931896	-0,544831600	-0,449777809	0,21485375	0,487261438	1

$G_{Hypersphere}$

1	0,565243758	0,452076676	-0,07828608	-0,940758189	-0,030436188
0,565243758	1	0,6638033	0,231589932	-0,834317242	-0,038860699
0,452076676	0,6638033	1	-0,479963513	-0,539718985	0,030142845
-0,07828608	0,231589932	-0,479963513	1	0,298702691	0,010542886
-0,940758189	-0,834317242	-0,539718985	0,298702691	1	0,036417008
-0,030436188	-0,038860699	0,030142845	0,010542886	0,036417008	1

$G_{Spectral} = C^{++}$

1	0,567682495	0,454972254	-0,026186672	-0,818246937	-0,007800339
0,567682495	1	0,549358022	0,172677556	-0,746513148	-0,037084515
0,454972254	0,549358022	1	-0,420567162	-0,515420746	0,004889011
-0,026186672	0,172677556	-0,420567162	1	0,31325826	0,011726248
-0,818246937	-0,746513148	-0,515420746	0,31325826	1	0,038838589
-0,007800339	-0,037084515	0,004889011	0,011726248	0,038838589	1

$G_{SDP}$

1	0,587653318	0,47928382	-0,034964207	-0,838859848	-0,008
0,587653318	1	0,559077085	0,167568219	-0,764634077	-0,038
0,47928382	0,559077085	1	-0,425420043	-0,545061343	0,005
-0,034964207	0,167568219	-0,425420043	1	0,31143565	0,012
-0,838859848	-0,764634077	-0,545061343	0,31143565	1	0,04
-0,008	-0,038	0,005	0,012	0,04	1

A livello di tempo computer, tutte le procedure di correzione hanno fornito  $G$  in un tempo inferiore ai 5 millesimi di secondo. Confrontando gli elementi di  $G_{i,j}$  con  $C_{i,j}$  si ottiene uno scostamento medio del centesimo.

Scostamento della matrice  $G_{Hypersphere}$  rispetto all'originale  $C$

0,00E+00	1,02E-02	-2,79E-02	-7,63E-02	-4,38E-02	-2,24E-02
1,02E-02	0,00E+00	7,68E-02	1,96E-02	8,68E-03	-8,61E-04
-2,79E-02	7,68E-02	0,00E+00	-3,30E-02	-3,27E-02	2,51E-02
-7,63E-02	1,96E-02	-3,30E-02	0,00E+00	-7,33E-02	-1,46E-03
-4,38E-02	8,68E-03	-3,27E-02	-7,33E-02	0,00E+00	-3,58E-03
-2,24E-02	-8,61E-04	2,51E-02	-1,46E-03	-3,58E-03	0,00E+00

Scostamento della matrice  $G_{Spectral}$  rispetto all'originale  $C$

0,00E+00	-1,27E-02	2,50E-02	2,42E-02	-7,88E-02	-2,00E-04
-1,27E-02	0,00E+00	3,76E-02	3,93E-02	-9,65E-02	-9,15E-04
2,50E-02	3,76E-02	0,00E+00	-2,64E-02	8,42E-03	1,11E-04
2,42E-02	3,93E-02	-2,64E-02	0,00E+00	5,87E-02	2,74E-04
-7,88E-02	-9,65E-02	8,42E-03	5,87E-02	0,00E+00	1,16E-03
-2,00E-04	-9,15E-04	1,11E-04	2,74E-04	1,16E-03	0,00E+00

Scostamento della matrice  $G_{SDP}$  rispetto all'originale  $C$

0,00E+00	3,27E-02	-7,16E-04	-3,30E-02	5,81E-02	5,77E-11
3,27E-02	0,00E+00	-2,79E-02	-4,44E-02	7,84E-02	7,77E-11
-7,16E-04	-2,79E-02	0,00E+00	2,16E-02	-3,81E-02	-3,78E-11
-3,30E-02	-4,44E-02	2,16E-02	0,00E+00	-6,06E-02	-6,01E-11
5,81E-02	7,84E-02	-3,81E-02	-6,06E-02	0,00E+00	1,06E-10
5,77E-11	7,77E-11	-3,78E-11	-6,01E-11	1,06E-10	0,00E+00

L'impatto sull'output del Monte Carlo dovuto all'adozione di una metodologia di correzione piuttosto che un'altra risulta essere minimale, come dimostrato dalle replicazioni condotte in regime di stazionarietà [9] e sintetizzate nel prospetto:

Replicazioni	Spectral	Hypersphere	Shrinkage	SDP
1	2,2102261%	2,2141185%	2,2276164%	2,2107967%
2	2,2106730%	2,2116257%	2,2197694%	2,2083545%
3	2,2088970%	2,2106371%	2,2188651%	2,2121212%
4	2,2237155%	2,2103987%	2,2263882%	2,2086711%
5	2,2128630%	2,2102108%	2,2261449%	2,2082748%
6	2,2087111%	2,2122074%	2,2236364%	2,2108836%
7	2,2085050%	2,2098686%	2,2283646%	2,2147018%
8	2,2135856%	2,2086188%	2,2229280%	2,2074029%
9	2,2089669%	2,2113843%	2,2196189%	2,2092837%
10	2,2108071%	2,2084207%	2,2213890%	2,2094017%
11	2,2076552%	2,2101444%	2,2253080%	2,2094132%
12	2,2082494%	2,2090356%	2,2232881%	2,2107433%
Media Replicazioni	2,2110712%	2,2105559%	2,2236098%	2,2100041%

Indipendentemente dalla metodologia di correzione impiegata, la stima della cedola finale è centrata sul valore 2,21%.

## 6 Conclusioni

Si reputa che l'implementazione di una routine di verifica con l'eventuale correzione degli autovalori negativi in una matrice di correlazione sia necessaria per eseguire l'integrazione di (1) ed arrivare quindi alla determinazione del pricing corretto dello strumento finanziario in esame. Per raggiungere tale scopo sono state presentate ed implementate quattro metodologie consolidate atte a risolvere il problema: Shrinkage Approach, Hypersphere Decomposition, Spectral Decomposition e la Semidefinite Programming.

Queste tecniche sono state testate su un'opzione strutturata, avente come sottostante sei assets e valorizzabile esclusivamente ricorrendo al metodo Monte Carlo: a convergenza la totalità di queste, ad eccezione della prima, hanno individuato il corretto fair value dello strumento finanziario con la precisione del punto base.

In sintesi, ad eccezione dello Shrinkage Approach, tutti i rimanenti algoritmi di correzione sono risultati nella pratica equivalenti e pariteticamente efficienti (richiedendo circa 5 millisecondi di tempo-computer per la correzione procedurale degli autovalori negativi di una matrice 6x6). Solo in contesti teorici e difficilmente riscontrabili nella pratica finanziaria (matrici di correlazione superiori ai 60 assets), la SDP può essere di fatto ritenuta preferibile. [2,6,7]

Lo Shrinkage, strutturalmente, non risulta essere una tecnica meno precisa rispetto a quelle basate sulla decomposizione, ma presenta il grave problema di non essere idonea alla generalizzazione a causa della dipendenza della scelta di una matrice di prossimità, dato iniziale necessario al corretto funzionamento della procedura. La scelta normalmente consigliata di inicializzarla ricorrendo alla matrice identità, indipendentemente dall'istanza del problema da affrontare, si rivela molto spesso buona, ma non ottima, e quindi in grado potenzialmente di dar luogo a piccole distorsioni sul risultato finale, proprio come si è verificato nella valorizzazione esaminata.

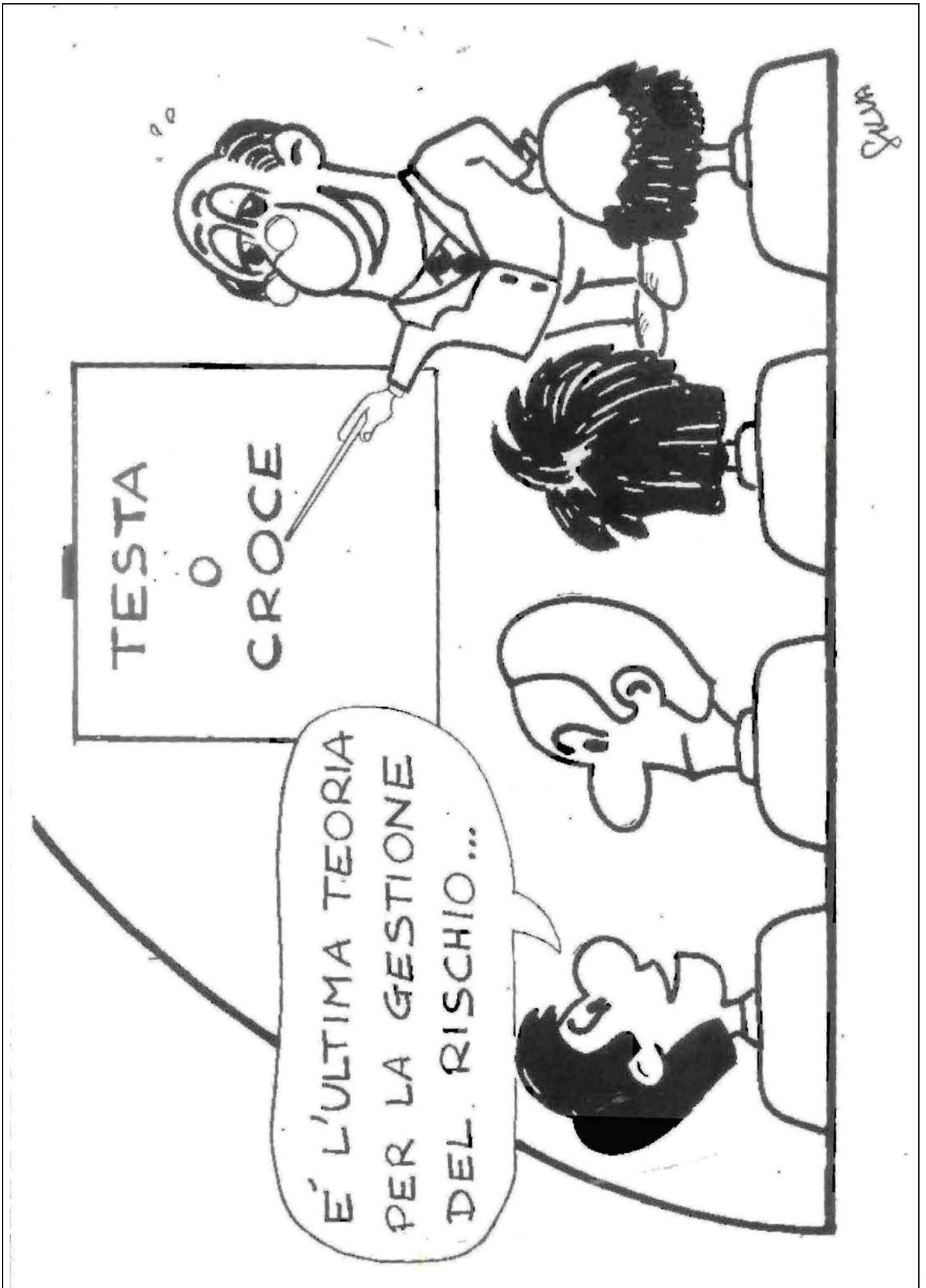
Pier Giuseppe Giribone e Simone Ligato

## Riconoscimenti

Gli A.A. desiderano rivolgere un sentito ringraziamento all'Ing. Simone Ventura per l'attenta revisione del presente lavoro.

## Bibliografia

- [1] R. Rebonato, P. Jäckel – “The most general methodology to create a valid correlation matrix for risk management and option pricing purposes” – Journal of Risk (1999)
- [2] K. Schöttle, R. Werner – “Improving the most general methodology to create a valid correlation matrix” – HVB Stiftungsinstitut für Finanzmathematik, Risklab Germany (2004)
- [3] N. Higham – “Computing the nearest correlation matrix: a problem from finance” – Journal of Numerical Analysis (2002)
- [4] Glasserman P. – “Monte Carlo Methods in Financial Engineering” – Springer (2003)
- [5] H. T. Huynh, V. S. Lai, I. Soumaré – “Stochastic simulation and applications in finance with Matlab programs” – Wiley Finance (2008)
- [6] P. Jäckel – “Monte Carlo methods in finance” – Wiley & Sons (2001)
- [7] L. Vandenberghe, L. Boyd – “Semidefinite Programming” – SIAM Review (1996)
- [8] Kupiec P. H., “Stress testing in a value at risk framework” – Journal of Derivatives (1998)
- [9] Mosca R., Cassettari L., Giribone P. G., “MSPE e Monte Carlo Pricing Method: tecniche di convergenza nei modelli finanziari” – AIFIRM Magazine (Associazione Italiana Financial Industry Risk Managers) (2010)
- [10] Middle Office CARIGE, “Manuale di installazione ed utilizzo delle librerie di MATFIN 1.0” (2011)
- [11] E. Popke – “Beta, Hra and Corr Calculation”, Bloomberg (2010)



# Come le banche perdono soldi quando i mutui sono rimborsati in anticipo<sup>1</sup>

di Antonio Castagna (Iason)

## 1. Introduzione

Il rimborso anticipato (*prepayment*) dei mutui residenziali in Italia è diventato un fenomeno rilevante negli ultimi anni. L'incremento dei tassi di *prepayment* è causato da molteplici cause, che possono essere così riassunte:

- La regolamentazione si è spostata verso una maggiore protezione del mutuatario dopo l'introduzione del Decreto Bersani (Aprile 2007) e della Legge Tremonti (maggio 2008). Come conseguenza di questa nuova regolamentazione, non può essere imposta alcuna penale né a fronte del rimborso anticipato dell'ammontare del utilizzato dal mutuatario, né per il suo trasferimento a un'altra banca.
- Il ciclo economico ha sperimentato un lungo periodo di tassi di interesse molto bassi.

Come può essere facilmente intuito, la compresenza di queste due cause comporta che per il mutuatario è conveniente pagare in anticipo il debito e riaprirlo ai tassi di interesse correnti. Il nuovo mutuo può essere riaperto con la stessa banca o con un'altra, poiché ci sono pochi costi di transazione espliciti.

D'altro canto, è chiaro che le banche stanno soffrendo perdite causate dall'attività di *prepayment*, anche se a volte non è ovvio capire se le coperture siano state non efficaci ovvero se c'è stato un errore nelle previsioni sui tassi di rimborso anticipato.

Nelle sezioni che seguono proviamo ad identificare le ragioni per cui i rimborsi anticipati producono perdite per le banche e quali rimedi si possono adottare.

## 2. Approcci Comuni per Modellizzare i Pagamenti Anticipati

Esistono due approcci fondamentali alla modellizzazione dei *prepayment*:

- **Modelli Empirici (*Empirical Models - EM*)**: il rimborso anticipato è modellizzato come una funzione di un insieme di variabili esplicative. Molti di questi modelli usano sia tassi di rimborso anticipato storici che altre variabili endogene, come il "burn-out", o variabili economiche, come il *PIL* o il livello dei tassi di interesse, col compito di spiegare i *prepayment* attuali. Dal momento che sono solo forme ridotte euristiche di rappresentazione di alcuni processi reali, non è chiaro come esse funzionerebbero in un differente ambiente economico. Per di più non c'è alcun collegamento dinamico tra il tasso di *prepayment* e le altre variabili esplicative.
- **Modelli di Rimborso Anticipato Razionali (*Rational Prepayment Models - RPM*)**: sono basati sulle teorie di valutazione dei contratti d'opzione, in quanto la propensione a rimborsare in anticipo dipende esclusivamente dall'evoluzione dei tassi di interesse. Il *prepayment* è da considerarsi come un'opzione per chiudere il contratto alla pari (ripagando il valore nominale dell'ammontare residuo), che può essere esercitata se il valore di mercato del mutuo è più alto del valore residuo nominale. Nonostante questi modelli colleghino la valutazione del mutuo e il *prepayment*, la loro previsione del rimborso anticipato non combacia con il comportamento di *prepayment* osservato in realtà, in quanto non tutti i debitori sono così esperti da poter valutare la convenienza a esercitare l'opzione. Uno degli svantaggi dei modelli razionali è che, nella loro forma di base, implicano che o non ci siano rimborsi anticipati o tutti i mutui con simili caratteristiche siano simultaneamente rimborsati in anticipo, poiché tutti i mutuatari eserciteranno la loro opzione.

Le peculiarità empiriche, comunemente rilevate nell'osservazione del *prepayment* dei mutui, sono le seguenti:

- Alcuni mutui sono rimborsati in anticipo anche quando il loro tasso cedolare è inferiore al valore corrente dei tassi del mutuo (implicando una non convenienza all'esercizio dell'opzione di prepagamento);
- Un certo numero di mutui non sono rimborsati sebbene il loro tasso cedolare è maggiore del loro tasso del mutuo (mancato esercizio razionale dell'opzione di prepagamento);
- Il *prepayment* appare essere dipendente dal fattore di *burn-out*: coll'approssimarsi della scadenza cresce il numero di prepagamenti.

Poiché gli *RPM* semplici non possono tenere in considerazione queste peculiarità, molte banche adottano gli *EM* nell'intento di stimare accuratamente i tassi di rimborso anticipato. La previsione è sintetizzata nel cosiddetto *CPR*, *Constant Repayment Rate* (Tasso di Rimborso Anticipato Costante), che è usato per stimare i flussi di cassa attesi e che può essere espresso come funzione di differenti variabili. Un esempio di noto modello di *EM* è quello *Richard & Roll* [2], adottato da *Goldman Sachs* e dall'*US Office of Thrifts and Supervision*, che può essere esplicitato in questa semplice forma:

$$CPR = f(\text{Incentivo al rifinanziamento})g(\text{Scadenza})h(\text{Durata})l(\text{Fattore di Burnout})$$

<sup>1</sup> Le idee e i modelli descritti in questo documento sono frutto dello sforzo intellettuale e delle competenze delle persone che lavorano in Iason. Non riprodurre o trasmettere qualsiasi parte di questo documento in qualunque forma o con qualunque mezzo, elettronico o meccanico, incluse fotocopie e registrazioni, per qualsiasi scopo, senza l'esplicito scritto permesso di Iason Ltd. © Iason – 2011



Quindi, il *CPR* dipende da quattro funzioni di quattro differenti fattori, tra i quali il più importante risulta essere l'Incentivo al Rifinanziamento, ovvero l'esercizio dell'opzione quando questo è conveniente. La funzione  $f()$  dell'Incentivo al Rifinanziamento (*Refinance Incentive - RI*) è modellata come segue:

$$RI = 0.3124 - 0.020252 \times \arctan(8.157[-(C + S) / (P + F) + 1.20761])$$

dove *arctan* è la funzione arcotangente, *C* è il tasso fisso del mutuo, *S* è l'importo commissionale del *pool*<sup>2</sup>, *P* è il tasso di rifinanziamento (ossia il tasso a cui si possono negoziare nuovi mutui) vigente sul mercato e *F* sono i costi aggiuntivi dovuti al rifinanziamento.

In generale, un *EM* stima abbastanza adeguatamente i flussi di cassa attesi, ed è usato anche per mettere in piedi portafogli con strumenti di *hedging* con nozionale aggiustato secondo il *CPR*. Dato che la maggior parte dei venditori di applicativi inseriscono gli *EM* nei loro sistemi *ALM* e che molte banche li utilizzano, esamineremo come funziona in pratica uno *hedging* con gli *EM*.

### 3. Hedging con un Modello Empirico

Nell'attuale contesto di mercato, l'Incentivo al Rifinanziamento è il fattore più importante. Siccome i mutuatari non sono soggetti a penali, a fronte del rimborso anticipato, essi sono più propensi a sfruttare l'opzione di *prepayment*. Inoltre, poiché trasferire il mutuo ad un'altra banca non implica costi, la competizione tra banche, quando i tassi correnti sono bassi, spinge i debitori al rifinanziamento dei mutui che hanno alti tassi contrattuali. Anche se una banca riesce a mantenere il mutuatario tra i propri clienti e ad evitare il trasferimento del contratto ad un'altra banca, essa è tuttavia forzata a rifinanziarlo ai nuovi tassi di mercato. In ogni caso, in termini pratici, questo è equivalente ad un rimborso anticipato.

È superfluo dire che quando l'incentivo al rifinanziamento è il maggior stimolo per il rimborso anticipato, la banca soffre una perdita che, in termini molto generali, può essere considerata come pari al costo di sostituzione del contratto rimborsato in anticipo.

Per questa ragione introduciamo un *EM* molto semplificato, e usiamo una funzione del tipo:

$$CPR = \alpha + \beta(C/P) \quad (1)$$

dove *C* e *P* sono definiti come sopra. Il *CPR* in Equazione (1) è una costante  $\alpha$  sommata a un coefficiente  $\beta$  del rapporto tra il tasso del mutuo *C* e il livello del tasso corrente *P*. Più basso è il tasso corrente *P*, più alto è il *CPR*.

Abbiamo creato un ambiente di laboratorio, ed abbiamo calibrato il modello (1) con dati empirici riprodotti da un generatore casuale. Assumiamo che *P* sia rappresentativo del livello generale dei tassi di interesse (e.g.: media dei tassi swap a 5, 10 e 20 anni). Inoltre, *C* è il tasso medio fisso del portafoglio dei mutui, che assumiamo uguale a 3.95% (in linea con i tassi di mercato che consideriamo in basso). Per ogni livello dei tassi abbiamo un *CPR* annuale generato dall'equazione:

$$CPR = 0.75\% + 5\% \times \frac{C}{P} + 0.5\% \times \varepsilon$$

<i>Rates</i>	<i>C/P</i>	<i>Prep. %</i>
2.50%	1.58	8.49%
3.00 %	1.32	7.15%
3.50%	1.13	6.44%
4.00%	0.99	5.46%
4.50%	0.88	4.66%
5.00%	0.79	4.45%
5.50%	0.72	4.09%
6.00%	0.66	3.83%
6.50%	0.61	2.75%
7.00%	0.56	3.76%
7.50%	0.53	2.96%

Tabella 1: Livello corrente dei tassi *P*, rapporto tra tasso fisso del mutuo e il livello corrente dei tassi (*C/P*) e percentuale dei mutui rimborsati anticipatamente *PP*%.

dove  $\varepsilon$  è un numero casuale estratto da una variabile con distribuzione normale. I dati sono mostrati in Tabella 1.

Abbiamo effettuato una regressione lineare per stimare i parametri del modello ed otteniamo  $\alpha = 0.02881267$  e  $\beta = 0.029949414$ . Una rappresentazione grafica della regressione si trova in Figura 1.

<sup>2</sup> Il modello originale *Richard & Roll* è stato concepito per *MBS*.  $S = 0$  se il modello è usato per portafogli mutui standard.

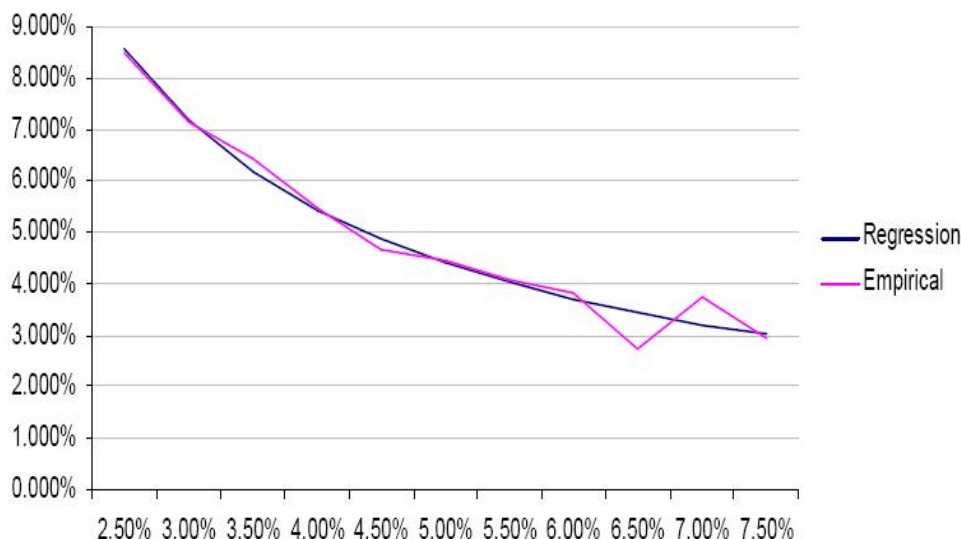


Figura 1: Stima della regressione lineare dei dati sui *prepayment*. La percentuale dei rimborsi anticipati in un anno è tracciata a fronte del livello dei tassi di interesse.

Il semplice modello di cui sopra sembra poter catturare i fattori rilevanti che impattano sull'attività di rimborso anticipato, che è strettamente dipendente al livello dei tassi correnti. Dato ciò, otteniamo un *CPR* utile a prevedere i flussi di cassa attesi e successivamente, a formulare strategie di *hedging* appropriate con altri derivati su tassi di interesse, solitamente *interest rate swap*. Il problema principale insito in questo *EM* è che non è dinamico e che sfortunatamente non assicura un'effettiva copertura **contemporaneamente** contro i movimenti dei tassi di interesse e l'attività di pagamento anticipato.

Per rendersi conto di ciò, consideriamo un mutuo rappresentativo del portafoglio mutui di una banca, venduto ai clienti alle condizioni correnti di mercato. Il mutuo si estingue in 10 anni, ha un ammortamento lineare ed il tasso fisso alla pari è al 3.95%, pagato annualmente, data la struttura di tassi a termine *Libor* ad un anno e gli associati fattori di sconto mostrati in Tabella 2. La Tabella 3 mostra il capitale residuo all'inizio di ogni anno. Per semplicità assumiamo inoltre che non venga applicato alcuno *spread* di credito, né alcun *mark-up* per coprire i costi amministrativi, sicché il tasso del mutuo sarà dato solo dai tassi *Libor*.

<i>Anno</i>	<i>Fwd Libor</i>	<i>Disc. Fact.</i>
1	3.25%	0.96852
2	3.50%	0.93577
3	3.75%	0.90195
4	4.00%	0.86726
5	4.25%	0.83190
6	4.50%	0.79608
7	4.75%	0.75998
8	5.00%	0.72379
9	5.25%	0.68769
10	5.50%	0.65184

Tabella 2: Tassi a termine *Libor* ad un anno e fattori di sconto per scadenze da 1 a 10 anni.

<i>Anno</i>	<i>Capitale residuo</i>
1	100
2	90
3	80
4	70
5	60
6	50
7	40
8	30
9	20
10	10

Tabella 3: Quota capitale residua all'inizio di ogni anno per il mutuo rappresentativo.

Possiamo inoltre calcolare i flussi di cassa attesi, data la previsione dell'attività di pagamento anticipato fornita dal modello sopra esposto. Se assumiamo che il livello dei tassi di interesse corrente sia riassunto nel tasso a 10 anni, 5.5%, il modello fornisce un *CPR* di 4.02% p.a.. L'ammortamento atteso del capitale e i flussi di cassa del tasso di interesse possono essere facilmente ottenuti, come in Tabella 4. Nel calcolare i flussi di cassa attesi abbiamo adottato la convenzione che il *CPR* sia un tasso continuo, in modo che, per un dato anno *T*, la percentuale di mutui rimborsati in anticipo sia  $(1 - e^{-CPR \times T})$ .

Il tasso equo del mutuo calcolato sui flussi di cassa attesi, considerando anche l'effetto di pagamento anticipato, è leggermente più basso e pari a 3.89%. Questo si comprende, in quanto ci troviamo in una curva ad elevata pendenza crescente e il rimborso anticipato implica una vita (attesa) del contratto più breve, riducendo così il tasso equo. In un mercato molto competitivo, le banche potrebbero essere spinte ad offrire un tale tasso più basso ai mutuatari, anche perché se si tengono in considerazione i costi per la copertura sembrerebbe che in realtà non stiamo regalando valore ai clienti.<sup>3</sup>

<i>Anno</i>	<i>Percentuale di Mutui Prepagati</i>	<i>Flussi di cassa attesi</i>	<i>Flussi di cassa contrattuali</i>	<i>Ammortamento atteso</i>
1	3.95%	17.346	13.95	86.45
2	7.74%	15.918	13.56	73.81
3	11.38%	14.575	13.16	62.04
4	14.87%	13.314	12.77	51.08
5	18.23%	12.129	12.37	40.88
6	21.46%	11.018	11.98	31.42
7	24.55%	9.976	11.58	22.63
8	27.53%	8.998	11.19	14.49
9	30.39%	8.083	10.79	6.96
10		7.356	10.40	0.00

Tabella 4: Percentuale di prestiti pagati anticipatamente per ogni singolo anno, flussi di cassa attesi, da contratto ed ammortamento atteso.

Nella realtà, l'ALM di una banca finanzia tipicamente il portafoglio mutui con un *roll-over* di debito a breve termine, oppure con un debito con simile scadenza ma con un tasso flottante. La motivazione è facilmente comprensibile, dato che la *duration* di un debito indicizzato ad un tasso flottante è molto bassa, e pertanto, anche la volatilità delle passività nel bilancio della banca è ridotta. Di conseguenza, la banca trasforma il portafoglio mutui a tasso fisso in uno a tasso flottante (cosicché la *duration* delle attività pareggi quella delle passività<sup>4</sup>), considerando i flussi di cassa attesi al posto dei flussi di cassa da contratto: in questo modo i *risk-manager* pensano di aver coperto in modo appropriato anche il rischio di rimborso anticipato, almeno in termini medi. La trasformazione, o copertura, è eseguita con strumenti di mercato liquidi, solitamente *swap*, pagando il tasso fisso guadagnato dal mutuo e ricevendo il *Libor fixing* (che è simultaneamente pagato sul finanziamento).

Nell'esempio che stiamo considerando, quello usato per la copertura non è uno *swap standard*, ma uno *swap* caratterizzato da un ammortamento con nozionale decrescente pari all'ammortamento atteso del mutuo, come nella quarta colonna di Tabella 4, che mostra il capitale residuo atteso alla fine di ogni anno. Poiché non stiamo considerando alcun *credit-spread* sul mutuo, e allo stesso modo non stiamo assumendo alcun *credit-spread* nel mercato degli *swap*, otteniamo che il tasso equo dello *swap* al momento della partenza della copertura è 3.89%, che è esattamente il tasso del mutuo calcolato con i flussi di cassa attesi, il che conferma quindi l'idea che non stiamo tralasciando nulla nella copertura dei costi, quando prezziamo il mutuo con i flussi di cassa attesi, invece di quelli contrattuali.

Se il modello di prepagamento *EM* sta prevedendo correttamente i tassi di pagamento anticipati, non ci saranno perdite: alla fine di ogni anno il capitale utilizzato sarà pari al capitale atteso (al netto dei pagamenti anticipati) e lo *swap* di copertura sarà comunque efficace nel proteggere l'esposizione ai movimenti dei tassi di interesse. Il problema è che in realtà il modello che stiamo utilizzando (e che, ripetiamo, è uno dei semplici modelli più comunemente inclusi nelle applicazioni *ALM* dei fornitori di *software*) collega il livello del *CPR* al livello dei tassi di interesse. Quindi, escludendo possibili divergenze dovute al normale errore statistico, le variazioni nel *CPR* sono dovute (intrinsecamente per costruzione del modello) anche a movimenti nella struttura a termine dei tassi di interesse, sebbene questo non possa essere incluso in modo dinamico nelle politiche di *risk-management* in quanto l'*EM* è statico.

Questo significa che se i tassi si muovono, la copertura dello *swap* non sarà più efficace e la banca dovrà ribilanciare in modo appropriato la quantità di nozionale. Ma i tassi di interesse normalmente si muovono, cosicché possiamo essere quasi sicuri che la copertura dovrà essere ribilanciata in futuro, anche se i parametri stimati del modello (1) si dimostrano essere corretti e non cambiano dopo una nuova calibrazione. In pratica la banca imposta un hedge alla chiusura del contratto che dovrebbe essere statico, ma che in pratica non potrà mai esserlo essendo il tasso costante di prepagamento collegato alla variabilità dei tassi di interesse, e dunque non essendo affatto costante nonostante la sua denominazione.

Essendo quasi totalmente certi che la banca cambierà il nozionale dello *swap* di copertura nel futuro, il problema è ora capire se questo ribilanciamento genera una perdita o un profitto (senza considerare i costi di transazione). Osserviamo quindi cosa succede se la struttura a termine dei tassi d'interesse a termine subisce uno spostamento parallelo in alto, o in basso, del 2% dopo un anno. In questo caso, se le probabilità di pagamento anticipato sono tenute costanti, il portafoglio di *swap* di copertura subirà una variazione positiva, o negativa, del suo valore attuale netto (*Net Present Value – NPV*), controbilanciando, di conseguenza, la negativa, o positiva, variazione dell'*NPV* del mutuo. Il profitto, o la perdita, può essere approssimato in modo molto accurato, poiché stiamo assumendo uno spostamento parallelo dei tassi a termine, ed è pari a  $DV01 \times \Delta r$ , dove *DV01* è l'annualità scontata

<sup>3</sup> Anche alcuni venditori di applicativi stanno sostenendo simili pratiche per permettere la determinazione di tassi per i mutui più competitivi, per battere le altre banche. Non serve dire che le banche stanno regalando valore ai clienti se davvero questa politica è adottata, come vedremo più in avanti.

<sup>4</sup> In realtà l'ALM dovrebbe pareggiare la *basis point sensitivity* degli *asset* e *liability*, per ogni pilastro delle scadenze rilevanti. Noi non ci dilungheremo in questi dettagli poiché fuoriescono dall'ambito dell'analisi corrente.

dei pagamenti del tasso fisso dello *swap*, e  $\Delta r$  è la variazione del tasso equo dello *swap* dovuta al cambiamento nei tassi a termine *Libor*.

In Tabella 5, mostriamo il profitto, e la perdita, dovuti alla chiusura dello *swap* originale di copertura, per i due scenari di uno spostamento parallelo in alto o in basso della struttura a termine dei tassi. Quando gli interessi calano, lo *swap* di copertura subisce una perdita, in quanto è un *payer* (pagatore di tasso fisso) e il nuovo tasso alla pari per un contratto *swap* simile è 2.09%; la perdita è data da *DV01* indicato nella seconda colonna moltiplicato per il  $\Delta r = 2.09\% - 3.89\%$ . Dall'altra parte, quando i tassi d'interesse a termine aumentano del 2%, la chiusura dello *swap* genera un profitto, ottenuto come sopra considerando il nuovo tasso *swap* alla pari del 6.05%. Come atteso, il profitto ha lo stesso ordine di grandezza della perdita. Inoltre, poiché lo *swap* sta "imitando" il mutuo, la variazione del *NPV* di quest'ultimo è specularmente uguale a quella del primo. La ragione per cui dobbiamo procedere alla chiusura dello *swap* originale di copertura e aprirne uno nuovo sarà chiarita tra un attimo.

		<b>Tasso</b>		
		<b>Equo</b>	<b>DV01</b>	<b>P&amp;L</b>
Down	2%	2.09%	364.67	-6.5462
UP	2%	6.05%	321.39	6.9578

Tabella 5: Profitti perdite dovute alla chiusura della posizione *swap* di copertura originale.

In effetti, se le probabilità di pagamento anticipato, e quindi i *CPR*, cambiano come previsto dalla formula (1), si producono due conseguenze: la prima è che lo *swap* originale non sta più coprendo perfettamente le variazioni sul valore del mutuo; la seconda è che dobbiamo ribilanciare il nozionale dello *swap* almeno per riportarlo in linea con il nuovo piano di ammortamento atteso del mutuo. Dobbiamo quindi chiudere la posizione originale e aprirne una nuova con un nuovo *swap* con ammontare nozionale che combaci con il nuovo piano d'ammortamento atteso del mutuo, mantenendo tuttavia il tasso fisso uguale a quello di partenza, perché questo è il tasso che la banca ancora riceve dal portafoglio di mutui e che può pagare nel contratto *swap*<sup>5</sup>.

In primo luogo, esaminiamo cosa succede nel futuro ai pagamenti anticipati attesi quando i tassi si muovono. La Tabella 6 mostra i nuovi piani d'ammortamento attesi dopo un cambiamento nel *CPR* dovuto a movimenti sui tassi d'interesse: con un nuovo livello nel *10Y*<sup>6</sup> a 3.5%, il *CPR* sarà 8.49%. Questo significa che il capitale residuo dopo un anno sarà inferiore a quello previsto dal *CPR* iniziale (4.02%), e di conseguenza anche l'ammontare del capitale residuo atteso nel futuro sarà più piccolo (cioè: l'ammortamento atteso sarà più accelerato).

<b>Anno</b>	<b>Percentuale di Mutui Prepagati</b>	<b>Flussi di cassa attesi</b>	<b>Nuovo ammortamento atteso</b>	<b>Differenze nell'ammortamento atteso</b>
1	8.14%	20.96	82.67	-3.78
2	15.62%	18.17	67.50	-6.31
3	22.49%	15.70	54.26	-7.78
4	28.80%	13.51	42.72	-8.36
5	34.60%	11.57	32.70	-8.18
6	39.92%	9.86	24.03	-7.39
7	44.82%	8.35	16.55	-6.08
8	49.31%	7.02	10.14	-4.36
9	53.44%	5.85	4.66	-2.31
10			0.00	

Tabella 6: Nuovo piano d'ammortamento atteso dopo un movimento verso in basso del 2% della struttura a termine dei tassi *forward*. Il *CPR* passa da 4.02% a 8.49% in accordo al modello della formula (1).

Lo stesso ragionamento si applica anche allo scenario in cui la struttura a termine dei tassi d'interesse *forward* subisce un movimento in alto del 2%. In questo caso, dalla formula (1), sappiamo che il nuovo tasso *CPR* sarà 2.96%, in corrispondenza a un tasso *forward* a *10Y* di 7.50%. Quindi l'ammontare residuo dopo un anno sarà più alto di quello precedentemente previsto, e di conseguenza anche tutti i futuri ammontari di capitale attesi saranno rivisti al rialzo (cioè: l'ammortamento atteso sarà più lento).

Ora dobbiamo calcolare il profitto o la perdita prodotta dall'apertura di una posizione in uno *swap* con lo stesso tasso dell'originale (che è pure il tasso del mutuo e che dobbiamo allineare alle date di pagamento degli interessi), con un piano di nozionale di riferimento che rispecchi l'ammortamento atteso del mutuo rivisto coerentemente coi nuovi livelli correnti dei tassi di mercato. La Tabella 8 riassume i risultati di entrambi gli scenari. Quando i tassi scendono di un 2%, il nuovo *swap* genera un profitto di 4.7119: ciò è facile da capire, perché la banca continua a pagare 3.89% sul contratto, anche se il tasso equo del nuovo *swap* è 2.37% (il profitto è calcolato come sopra, tramite il *DV01* nella seconda colonna). Tuttavia, se consideriamo anche la perdita subita quando chiudiamo la posizione dello *swap* originale (mostrata sopra nella Tabella 5), la banca soffre una perdita totale netta di -0.8185, come si vede nella quarta colonna.

<sup>5</sup> Qui assumiamo l'assenza di costi di transazione, e quindi scegliamo il rimpiazzo brutale del primo *swap* col secondo. Chiaramente, possono essere adottate strategie di ribilanciamento più efficienti per minimizzare i costi di transazione, in quanto essi sono in realtà pagati nel mercato.

<sup>6</sup> In realtà, dopo un anno è la scadenza a *9Y*. Per lo scopo di quest'analisi proviamo a prevedere il nuovo tasso *10Y*.

<i>Anno</i>	<i>Percentuale di Mutui Prepagati</i>	<i>Flussi di cassa attesi</i>	<i>Nuovo ammortamento atteso</i>	<i>Differenze nell'ammortamento atteso</i>
1	2.92%	16.46	87.36	0.93
2	5.75%	15.33	75.40	1.59
3	8.50%	14.24	64.05	2.01
4	11.17%	13.21	53.30	2.22
5	13.76%	12.22	43.12	2.23
6	16.28%	11.28	33.49	1.75
7	18.72%	10.39	24.38	1.29
8	21.10%	9.54	15.78	1.29
9	23.40%	8.73	7.66	0.70
10		8.06	0.00	0.00

Tabella 7: Nuovo piano d'ammortamento atteso dopo un aumento del 2% della struttura a termine dei tassi *forward*. Il *CPR* passa da 4.02% a 2.96% in accordo al modello in equazione (1).

Sorprendentemente, la banca subisce una perdita netta anche quando l'attività di pagamento anticipato rallenta con tassi più alti, nello scenario di rialzo parallelo. In effetti, nonostante il profitto ricavato chiudendo la posizione dello *swap* originale, la perdita sofferta aprendo il nuovo *swap* è maggiore.

	<i>Tasso Equo</i>	<i>DV01</i>	<i>P&amp;L</i>	<i>Net P&amp;L</i>
Down 2%	2.37%	310.43	4.7119	-0.8185
UP 2%	6.05%	332.57	-7.2329	-0.2752

Tabella 8: Profitti e perdite dovuti all'apertura dei nuovi *hedging swap* e risultato netto che considera la chiusura della posizione originale.

A questo punto, sfortunatamente, siamo quasi sicuri che la strategia di copertura di un mutuo, basata sull'assumere una posizione in uno *swap* con un nozionale che imiti l'ammortamento atteso del mutuo, sia imperfetta e produca sempre perdite, a meno che i tassi non cambino e di conseguenza i *CPR* restino fissi. In realtà questo accade raramente, poiché i tassi di interesse si muovono, e gli *EM* prevedono che i *CPR* cambino. Dobbiamo perciò esaminare più a fondo dove si originano le perdite, così da poter trovare una strategia di copertura più efficace.

#### 4. Strategie di Hedging Efficaci sul Rischio di Pagamento Anticipato

Per comprendere meglio come si producono perdite quando si coprono i flussi di cassa attesi, consideriamo il seguente caso: una banca ha un mutuo *bullet* con un mutuatario di un ammontare  $A$ , che scade in due anni. Alla fine del primo anno il mutuo paga il tasso d'interesse fisso  $c$  e alla fine del secondo anno ripaga l'interesse  $c$  e il capitale  $A$ . Alla fine del primo anno, ha inoltre l'opzione di rimborsare in anticipo l'intero utilizzo più gli interessi maturati: assumiamo che questa opzione è esercitata con una probabilità  $p$ . La Tabella 9 mostra i flussi di cassa attesi e l'ammortamento atteso e da contratto all'inizio di ogni anno.

La banca chiude uno *swap payer* (di tasso fisso) con scadenza a due anni ed un ammontare nozionale variabile pari ogni anno all'ammortamento atteso. Questo non è uno *swap standard* scambiato nel mercato interbancario, ma comunque non è difficile ottenere una quotazione da un *market-maker*. Indichiamo con  $\text{Swp}(n,m)$  uno *swap* che inizia al tempo  $n$  e scade a  $m$ .

<i>Anno</i>	<i>Interessi</i>	<i>Flussi di cassa attesi</i>	<i>Ammortamento atteso</i>	<i>Ammortamento</i>
0				$A$
1	$C$	$c + A \times p$	$A - A \times p$	$A$
2	$C$	$c + A \times (1 - p)$	0	0

Tabella 9: Un semplice mutuo *bullet* a 2 anni.

Possiamo scomporre lo *swap* di 2 anni in due *swap* di un anno, cosicché il portafoglio *swap* di copertura  $P$  sia composto da:

- $A \times \text{Swp}(0,1)$
- $(A - A \times p) \times \text{Swp}(1,2)$

È facile vedere che il portafoglio sarà:

$$P = A \times \text{Swp}(0,2) - p \times A \times \text{Swp}(1,2)$$



In quanto  $\mathbf{Swp}(0,1) + \mathbf{Swp}(1,2) = \mathbf{Swp}(0,2)$ . La seconda componente del portafoglio è una posizione corta in uno *swap forward-starting*, il cui nozionale è l'ammontare nozionale del mutuo pesato con la probabilità di pagamento anticipato alla fine del primo anno. Lo swap a partenza differita può essere ulteriormente scomposto, per mezzo della parità *put-call*, come segue:

$$\mathbf{Swp}(1,2) = \mathbf{Pay}(1,2;c) - \mathbf{Rec}(1,2;c)$$

dove  $\mathbf{Pay}(n,m,K)$  ( $\mathbf{Rec}(n,m;K)$ ) è il valore di una *payer (receiver) swaption* con strike pari a  $K$ , che scade in  $n$ , scritta su un *forward swap* che inizia in  $n$  e scade in  $m$ . Quindi, mettendo assieme i risultati, otteniamo che il portafoglio di copertura è:

$$P = A \times \mathbf{Swp}(0,2) - p \times A \times (\mathbf{Pay}(1,2;c) - \mathbf{Rec}(1,2,c)) \quad (2)$$

Se la probabilità di rimborso anticipato  $p$  (il *CPR* in pratica) non varia con il livello dei tassi di interesse<sup>7</sup>, allora, l'equazione (2) è solo un modo alternativo per esprimere la posizione in uno *swap* con scadenza e ammortamento del nozionale uguali a quelli del mutuo. Pertanto, le seguenti due strategie saranno esattamente equivalenti:

1. Entrare in un *payer swap* (a tasso fisso), con un piano ammortamento uguale al piano ammortamento atteso del mutuo, e con la stessa scadenza del mutuo.
2. Entrare in un *payer swap* (a tasso fisso), con un piano ammortamento uguale al piano ammortamento contrattuale del mutuo, e con la stessa scadenza del mutuo; vendere una *payer swaption* che scada in un anno, scritta su uno *swap* ad un anno, con livello della strike  $c$  uguale al tasso del mutuo; comprare una *receiver swaption*, con le stesse caratteristiche della *payer swaption*. L'ammontare dello *swap* sottostante la *swaption* segue il piano ammortamento contrattuale, mentre la quantità di *swaption* da comprare, o vendere, è uguale alla probabilità di rimborso anticipato<sup>8</sup>.

L'equivalenza tra le strategie 1) e 2) svanisce se la probabilità di rimborso anticipato  $p$  non è indipendente dal livello dei tassi di interesse, come nel caso del semplice *EM* che abbiamo presentato nella sezione precedente, e generalmente come avviene nella realtà. Se questo è il caso, la scomposizione permette una copertura più precisa e efficace.

Tornando al nostro esempio numerico di cui sopra, è di semplice comprensione quali fattori causino le perdite. Difatti, nell'esempio numerico la banca ha deciso di coprire il mutuo con la strategia 1), assumendo che abbiamo una probabilità di rimborso anticipato costante (*CPR*). Ma il comportamento del mutuuario (modellato con l'*EM* (1)) implica una probabilità più alta quando i tassi di interesse di mercato calano, ed una più bassa quando salgono. Possiamo quindi fare le seguenti considerazioni:

- Quando i tassi di interesse scendono, il *NPV* del mutuo aumenta, e questo è compensato dal *payer swap* con la stessa scadenza. La perdita si origina dal fatto che la probabilità di rimborso anticipato è maggiore di quella stimata alla stipula del contratto. Se visto dalla prospettiva della strategia 2), è come se la banca avesse comprato una *receiver swaption* la cui quantità  $p$  è la probabilità di rimborso anticipato assunta all'inizio del contratto. Ma ciò non è sufficiente a coprire la perdita del mutuo che implica l'assunzione di una posizione corta su una *receiver swaption* caratterizzata da una quantità maggiore, uguale alla nuova probabilità di rimborso anticipato.
- Quando i tassi di interesse salgono, il *NPV* del mutuo diminuisce, essendo questo controbilanciato dall'aumento nel valore dello *swap*. Anche in questo caso la perdita è originata dal fatto che la posizione corta della *payer swaption* (uguale alla probabilità  $p$  di rimborso anticipato iniziale) si scopre essere maggiore di quella necessaria alla minore probabilità di rimborso anticipato corrente con tassi più alti.
- Una considerazione più generale: perché una banca dovrebbe vendere la *payer swaption* quando copre il mutuo? Quando la banca adotta la strategia 1), sta implicitamente replicando la posizione corta nella *payer swaption*, con anche l'aggravante di farlo in quantità più grandi del necessario quando il suo *NPV* è negativo (cioè: quando i tassi aumentano). In realtà, se la banca adotta la strategia di copertura 2), è in grado di discernere i vari strumenti da comprare o vendere, e quindi di decidere quale vale la pena scambiare o meno.

L'analisi in questa sezione è molto utile e in Appendice A forniamo una scomposizione del portafoglio di copertura per un mutuo generico con scadenza e un piano ammortamento dati. In sintesi il portafoglio di copertura generalizzato comprende:

1. Un *payer swap* con lo stesso tasso fisso e scadenza del mutuo, e con lo stesso piano ammortamento del piano ammortamento contrattuale del mutuo.
2. Una posizione corta nel portafoglio di *payer swaption*, che scadono a ogni data di possibile rimborso anticipato e scritte su uno *swap* con scadenza uguale a quella del mutuo e con il piano ammortamento contrattuale del mutuo.
3. Una posizione lunga nel portafoglio di *receiver swaption*, che scadono a ogni data di possibile rimborso anticipato e scritta su uno *swap* con scadenza uguale a quella del mutuo e con il piano ammortamento contrattuale del mutuo.

Ogni *swaption* ha una quantità uguale alla probabilità che il rimborso anticipato avvenga tra le scadenze di due *swaption* contigue.

<sup>7</sup> Tuttavia potrebbe essere dipendente in modo deterministico al tempo.

<sup>8</sup> Questa distinzione molto importante non è mostrata in questo esempio a 2 anni semplificato, ma è molto più chiaro da una generalizzazione (vedi Appendice A) della scomposizione proposta della copertura, con scadenze e piani ammortamento arbitrari.



Dal portafoglio di copertura possono essere tratte importanti conclusioni:

- Bisogna disegnare un modello dinamico della probabilità di *prepayment*, per coprirne efficacemente il rischio, così da permettere un aumento dei rimborsi anticipati quando i tassi scendono.
- Assegnare una maggiore probabilità quando i tassi sono bassi, aumentando la sensibilità del valore delle *receiver swaption* che la banca deve comprare per coprire le esposizioni. Questo permette dei tassi di copertura più attendibili permettendo di coprirsi efficacemente contro i costi che occorrono quando l'attività di *prepayment* aumenta.
- Inoltre, dare una maggiore probabilità quando gli interessi sono bassi, aumenta il prezzo dei portafogli di *receiver swaption* necessarie per coprire l'esposizione. Questo significa che l'opzione di *prepayment* è prezzata in modo più accurato e può essere inclusa nel tasso finale da applicare nel contratto di mutuo.
- Vendere il portafoglio di *payer swaption* non è necessario: stiamo coprendo, senza necessità, una posizione specularmente lunga di opzioni sul mutuo, che può garantire qualche profitto. Abbiamo visto che le strategie *standard* comunemente adottate (basate sul piano atteso di ammortamento) in effetti simulano la vendita di questo portafoglio di *swaption*, molto probabilmente con un importo maggiore del necessario.
- Quando includiamo gli effetti dei *prepayment* nel prezzare un prestito, la banca non deve prezzare la posizione a lungo nel portafoglio *payer swaption*, riducendo così il tasso finale del contratto. In realtà questa è un'opzionalità nascosta e non può essere prezzata facilmente dagli ipotecari, anche in un ambiente molto competitivo con *player* piuttosto sofisticati.

## 5. Conclusioni sui Modelli di Prepayment

Per ideare un modello di *prepayment* si possono utilizzare alcuni accorgimenti:

- Gli *EM* possono essere utili, ma devono essere integrati con un *RPM*: la scomposizione di cui sopra rende chiaro che i mutuatari stanno implicitamente, per un certo ammontare, assumendo una posizione lunga in un portafoglio di *receiver swaption*, che dev'essere inserita nel prezzo (tasso finito del mutuo).
- La probabilità di *prepayment* deve essere collegata dinamicamente al livello dei tassi di interesse.
- Poiché dobbiamo includere la valutazione delle opzioni nel prezzo, dobbiamo tenere in considerazione anche la volatilità dei tassi d'interesse, di modo che il modello di *prepayment* possa essere disegnato congiuntamente al modello dei tassi d'interesse.
- Di conseguenza possiamo fare *hedging* non solo sulla sensibilità ai tassi d'interesse, ma anche alla loro volatilità (cioè: Vega).

Castagna e Mercurio hanno sviluppato un modello<sup>9</sup> di *prepayment* per coprirsi dal rischio di rimborso anticipato dei mutui a tasso fisso che considera tutti i punti di cui sopra. Questo fornisce al *ALM* un valido strumento per inserire i costi nelle opzionalità implicite nel prezzamento di nuovi mutui, e per fare un effettivo *hedging* sulle esposizioni di un portafoglio aggregato di mutui. La formidabile sfida del calcolo del modello è stata affrontata ottenendo un'elegante, accurata e veloce soluzione che eviti di ricorrere al *metodo Montecarlo*, che è piuttosto instabile nel calcolare le sensibilità e non adatto a portafogli di centinaia di migliaia di contratti come sono i portafoglio mutui delle banche.

Antonio Castagna

## Bibliografia

- [1] A. Castagna e F. Mercurio. Valuation, hedging and liquidity management of the prepayment options. *Iason Research Paper*, 2010.
- [2] S.F. Richard e R. Roll. Prepayments on fixed-rate mortgage-backed securities. *The Journal of Portfolio Management*, pagine 73–82, 1989.

---

<sup>9</sup> Vedi Castagna e Mercurio [1].

## Appendice A: una Scomposizione Generale di un Hedging Swap

Assumiamo che al tempo  $t_0$  un finanziamento ha i seguenti termini contrattuali:

- il nozionale del finanziamento è  $A_0 = A$
- il mutuatario paga a scadenze predefinite  $t_j$ , per  $j \in (0, 1, \dots, b)$ , un tasso fisso e calcolato sul capitale residuo da pagare all'inizio del periodo di riferimento  $\tau_j = t_j - t_{j-1}$ , indicato da  $A_{j-1}$ . Il pagamento interessi sarà quindi  $c\tau_j A_{j-1}$ ;
- nelle stesse date, oltre agli interessi, il mutuatario paga anche  $I_j$  che è una parte del capitale residuo in accordo con il piano d'ammortamento
- La scadenza è  $t_b = T$

Il mutuatario ha un'opzione di risolvere il contratto tramite il pagamento anticipato alle scadenze  $t_j$  del capitale ancora da pagare  $A_j$ , insieme con gli interessi e le rate capitale come sopra definite. La decisione di pagare anticipatamente, per qualsiasi ragione, può essere presa in ogni momento, sebbene il pagamento anticipato avvenga nelle date di scadenza dei pagamenti fissate.

L'ipotesi che le date di pagamento degli interessi, del capitale e di pagamento anticipato siano le stesse, può essere facilmente accettata.

Il tasso equo per la rata  $c$  può essere calcolato ponderando il valore attuale dei flussi di cassa futuri con il nozionale tempo  $t_0$ :

$$\sum_j [c\tau_j A_{j-1} + I_j] P(t_0, t_j) = A$$

Che immediatamente conduce a:

$$c = \frac{A - \sum_j I_j P(t_0, t_j)}{\sum_j \tau_j A_{j-1} P(t_0, t_j)}$$

dove  $P(t_0, t_j)$  è il fattore di sconto al tempo  $t_0$  per la data  $t_j$ . Si noti che la quantità  $A - \sum_j I_j P(t_0, t_j)$  può essere sostituita con  $\sum_j \tau_j A_{j-1} F_j(t_0, t_j)$ , dove  $F_j(t_0, t_j)$  è il tasso *forward* al tempo  $t_0$  con inizio al tempo  $t_j$ .

Quando si stimano i flussi di cassa futuri, la probabilità di incassi anticipati del nozionale residuo ad un certo tempo  $t_k$  deve essere calcolata come segue:

$$PP_e(t_0, t_k) = 1 - SP_e(t_0, t_k)$$

Dove  $SP_e(t, T)$  è la probabilità di sopravvivenza. I flussi di cassa stimati totali (*interessi + capitale*) al tempo  $t_k$  per ogni data di pagamento fissata  $\{t_j = t_k\}$  sono dati dalla seguente formula:

$$CF^e(t_0, t_j) = (I_j + c\tau_j A_{j-1}) (1 - PP_e(t_0, t_j)) + A_{j-1} (PP_e(t_0, t_j) - PP_e(t_0, t_{j-1}))$$

L'ammontare ancora dovuto in ogni singola data di pagamento è dato da:

$$A_j^e(t_0, t_j) = A_{j-1} - [I_j (1 - PP_e(t_0, t_j)) + A_{j-1} (PP_e(t_0, t_j) - PP_e(t_0, t_{j-1}))]$$

Consideriamo la copertura di questo finanziamento tramite un insieme di *swap*, aventi come durata un singolo periodo, avente inizio in  $t_0$  e termine in  $t_b = T$ :

10 Questo è stato banalmente ottenuto considerando l'equazione per prezzare un mutuo con ammortamento a tasso flottante.

11 I tempi di pagamento da piano sono desunti pari ai tempi di *prepayment* possibili.

1. al tempo  $t_0$  compriamo uno swap  $Swp(t_0, t_1) \times A_0$ ;
2. al tempo  $t_1$  compriamo uno swap  $Swp(t_1, t_2) \times A_1^f(t_0, t_b)$ ;
3. ...
4. al tempo  $t_b = T$  compriamo uno swap  $Swp(t_1, t_b) \times A_j^f(t_0, t_b)$ ;

È possibile dimostrare con alcuni accorgimenti che al tempo  $t_1$  abbiamo:

$$A_j^f(t_0, t_j) = A_0 - A_0 \left( PP_e(t_0, t_j) - PP_e(t_0, t_0) \right) + I_1 \left( PP_e(t_0, t_1) - PP_e(t_0, t_0) \right) - I_1 PP_e(t_0, t_1) \\ = A_1 - A_1 PP_e(t_0, t_1)$$

Al tempo  $t_2$ :

$$A_2^f(t_0, t_j) = A_2 - A_2 \Delta PP_1 + I_2 \Delta PP_1 - A_2 \Delta PP_2 + I_2 \Delta PP_e(t_0, t_j) \\ = A_2 - A_2 \Delta PP_1 - A_2 PP_2$$

Dove abbiamo definito  $\Delta PP_i = PP_e(t_0, t_i) - PP_e(t_0, t_{i-1})$ . Con le stesse premesse al tempo  $t_j$  possiamo scrivere:

$$A_2^f(t_0, t_j) = A_j - \sum_{i=1}^j A_i \Delta PP_i$$

Ora definiamo un set di *swap* con un nozionale variabile uguale all'ammortamento fissato del finanziamento:  $Swp^A(t_0, t_b)$ . questi *swap* non devono avere come termine iniziale la stessa data del finanziamento ma possono anche cominciare in un periodo successivo, in tal caso l'ammontare del loro nozionale si accoppia con il piano d'ammortamento del finanziamento solo per le date residuali.

Se noi sostituiamo  $A_j^f(t_0, t_j)$  nel portafoglio di *hedging*, e sommiamo tutti gli *swap* con scadenza futura, vediamo che esso contiene:

5. uno swap che paga a tasso fisso  $Swp^A(t_0, t_b)$ ;
6. un portafoglio di *swap* con scadenza futura corta su *payer* (o lunga *receiver*) ognuno dei quali ha data di scadenza  $t_b$  e ognuno ponderato con un dato fattore:  $-\sum_{i=1}^j Swp^A(t_i, t_b) \Delta PP_i$ .

Ogni *swap* con scadenza iniziale futura può essere di volta in volta scomposto tramite la *put-call parity*:  $Swp^A(t_i, t_b; c) = Pay^A(t_i, t_b; c) - Rec^A(t_i, t_b; c)$ . La *payer* e la *receiver swpation* sono scritte su *swap* che rispecchiano i piani d'ammortamento del mutuo per le date residue fino alla data finale  $t_b$ . Quindi raccogliendo tutti i risultati abbiamo il portafoglio *hedging*  $P$  è uguale a

$$P = Swp^A(t_0, t_b) - \sum_{i=1}^j \Delta PP_i Pay^A(t_i, t_b, c) + \sum_{i=1}^j \Delta PP_i Rec^A(t_i, t_b, c)$$

Questo è il risultato descritto nella sezione 4.

## La misurazione del rischio creditizio di un portafoglio di titoli governativi: l'approccio del Credit-VaR.

di Chiara Andolfo (Junior Analyst Vertis SGR)

### Introduzione

La minaccia più grave alla stabilità finanziaria risiede nelle forti interconnessioni tra le vulnerabilità delle finanze pubbliche di alcuni Stati e il sistema bancario. Attualmente il maggior rischio per i portafogli bancari è legato alla crisi del debito sovrano. La recente crisi finanziaria ha reso necessario riformulare ed integrare i modelli che attualmente le istituzioni finanziarie utilizzano per la stima del rischio di credito.

Con la crisi mondiale si è assistito al downgrade di diversi Paesi, avvertendo la conseguente necessità di ristrutturare le relative policy di *risk management*: i titoli di Stato, da sempre considerati *risk free*, devono, invece, essere considerati titoli potenzialmente rischiosi.

Ne consegue la necessità di inserire tali government bond nei modelli di gestione del rischio di credito applicati ai corporate bonds.

I modelli creditizi sono riconducibili a due macro-categorie:

- **modelli in forma strutturale:** in quest'approccio - introdotto da Merton (1974) - l'evento creditizio deriva dall'evoluzione degli *asset* dell'impresa emittente, modellati attraverso un processo diffusivo, ad es. Creditmetrics;
- **modelli in forma ridotta:** in questi modelli - dovuti originariamente a Fons (1994) - l'evento creditizio viene modellato, invece, sulla base di un processo stocastico che descrive la dinamica della intensità di *default*, ad es. CreditRisk+.

### Creditmetrics

Il modello a cui si farà riferimento nel presente lavoro è CreditMetrics. Con la seguente nota si introduce il documento tecnico dedicato alla dettagliata descrizione del modello per la valutazione del rischio di credito messo a punto dalla banca americana J.P. Morgan e lanciato nel 1997.

*"CreditMetrics is a tool for assessing portfolio risk due to changes in debt value caused by changes in obligor credit quality. We include changes in value caused not only by possible default events, but also by upgrades and downgrades in credit quality. Also, we assess the value-at-risk (VaR) not just the expected losses. Importantly, we assess risk within the full context of a portfolio. We address the correlation of credit quality moves across obligors. This allows us to directly calculate the diversification benefits or potential over-concentrations across the portfolio"*<sup>1</sup>

Il rischio non deriva solo dal possibile default delle controparti ma da qualunque evento suscettibile di sensibili modifiche del valore del prestito. Si parla di eventi creditizi i quali possono influenzare negativamente il valore del credito, ma anche accrescerlo, diminuendo la rischiosità complessiva del portafoglio impieghi. Il modello è quindi "multistato": segue una logica binaria, considerando credito sano o fallimento della controparte, ma prende in considerazione una pluralità di possibili stati futuri in cui i crediti, pur restando formalmente *in bonis*, possono vedere accresciuta la loro probabilità di insolvenza nel tempo.

CreditMetrics parte dalle ipotesi del metodo di Merton in cui si considera un'impresa dalla struttura finanziaria semplificata, caratterizzata all'attivo da un insieme di attività con valore  $V$ , al passivo da mezzi propri pari a  $E$  e da un indebitamento con valore di rimborso  $B$  e scadenza  $T$ .

Alla scadenza  $T$  del debito, si potranno verificare due eventi: se il valore delle attività  $VT$  sarà superiore al valore del debito  $B$ , il debito sarà rimborsato e il valore dei mezzi propri sarà dato da  $VT - B$ , oppure, se il valore delle attività sarà inferiore a quello del debito, l'impresa sarà insolvente e il valore dei mezzi propri sarà zero. In termini formali, il valore dei mezzi propri dell'impresa sarà dato da:

$$ET = \max(VT - B, 0)$$

e corrisponde al payoff a scadenza di un'opzione call sul valore delle attività dell'impresa con prezzo di esercizio pari a  $B$ . Tale approccio, pertanto, considera solo l'eventuale ipotesi di default della controparte.

Per ottenere un modello multistato, che integri le probabilità di default (PD) con quelle di migrazione, si ricorre ad un'estensione del modello di Merton. L'idea sviluppata è quella di ipotizzare che esista una serie di livelli dell'attivo, le cosiddette "asset return threshold", che fungendo da soglie, determinano il merito creditizio dell'impresa al termine del periodo considerato.

L'intera struttura del modello è organizzata in modo da raggiungere l'obiettivo di determinare il livello di rischio connesso ad un portafoglio di prestiti e non ad un singolo credito o ad un insieme di crediti valutati singolarmente. Questo aspetto è di fondamentale importanza in quanto le *performance* economiche dei diversi prenditori, e quindi il loro merito creditizio, sono correlate tra loro.

Il modello CreditMetrics non si focalizza solo sul livello di perdita attesa relativa ad un portafoglio impieghi, ma valuta anche e soprattutto la variabilità di tale perdita attesa e la differenza tra la perdita attesa e un dato percentile. Questo corrisponde all'

<sup>1</sup> J.P. Morgan 1997 pag 5

effettivo grado di rischio. La perdita attesa, infatti, rappresenta il valore medio della distribuzione delle perdite: in quanto “attesa”, non può considerarsi come rischio. Si tratta infatti di una componente già incorporata nelle aspettative della banca. La perdita inattesa rappresenta, invece, il vero fattore di rischio ossia che la perdita si dimostri, al termine dell’orizzonte temporale prescelto, superiore a quella inizialmente stimata.

## Il modello multistato alla Merton

### 1. Inquadramento teorico

Nel caso di un portafoglio composto da un numero elevato di obbligazioni governative, si pongono difficoltà metodologiche dovute principalmente alla mancanza di corsi azionari. Poiché il valore degli attivi non costituisce una variabile direttamente osservabile questo viene approssimato da un generico indice di merito creditizio (*Creditworthiness Index* o *CWI*).

Per la corretta specificazione del modello, inoltre, l’altra scelta rilevante concerne l’identificazione dei fattori di mercato, meglio detti *credit driver*.

Si assume che l’indice di merito creditizio sia distribuito come una normale standard e che si possa scomporre in due componenti di rischio, una sistemica ed una specifica.

La componente sistemica è influenzata dai *credit driver*, mentre la componente specifica rispecchia le caratteristiche del singolo emittente.

Il  $CWI$  ( $Z_{i,t}$ ) è pertanto definito come segue:

$$Z_{i,t} = \sum_{j=1}^J \beta_{i,j} \cdot X_{j,t} + \sqrt{1 - \beta_i' \Omega \beta_i} \cdot \varepsilon_i$$

dove:

$\beta_{i,j}$ : sensitività dell’emittente rispetto al *credit driver j-esimo*;

$X_{j,t}$ : rendimenti standardizzati del j-esimo *credit driver*;

$\Omega$ : matrice dei *credit driver*;

$\beta_i \Omega \beta_i'$ : correlazione tra i *CWI* degli emittenti;

$\varepsilon_i$ : componente idiosincratica distribuita secondo una normale standard, con media zero, varianza unitaria e correlazione nulla con il fattore di mercato e con i residui di altri emittenti, ossia  $cov(\varepsilon_{1,t}; \varepsilon_{2,t}) = 0$  e  $cov(\varepsilon_{1,t}; \varepsilon_{2,t}) = 0$ .

Il modello di Merton può essere esteso in modo tale che vengano presi in considerazione oltre agli eventi di default anche le migrazioni tra classi di rating. A tal fine occorre definire in aggiunta alla *default threshold* ulteriori soglie per il *CWI*, superate le quali si verificano transizioni tra classi di *rating*. La suddivisione in intervalli dello spettro di possibili valori per il *CWI*, che si ottiene attraverso l’identificazione delle *migration threshold*, deve essere effettuata in modo tale da garantire che:

- il numero di intervalli creati corrisponda al numero di classi di rating ;
- la probabilità che il *CWI* assuma un valore contenuto in un intervallo associato a un determinato rating sia uguale al tasso storico di migrazione annuale verso quella stessa classe di rating.

Le *threshold* vengono determinate mediante la seguente formula:

$$z(i,j) = \Phi^{-1}(F(i,D) + \dots F(i,j))$$

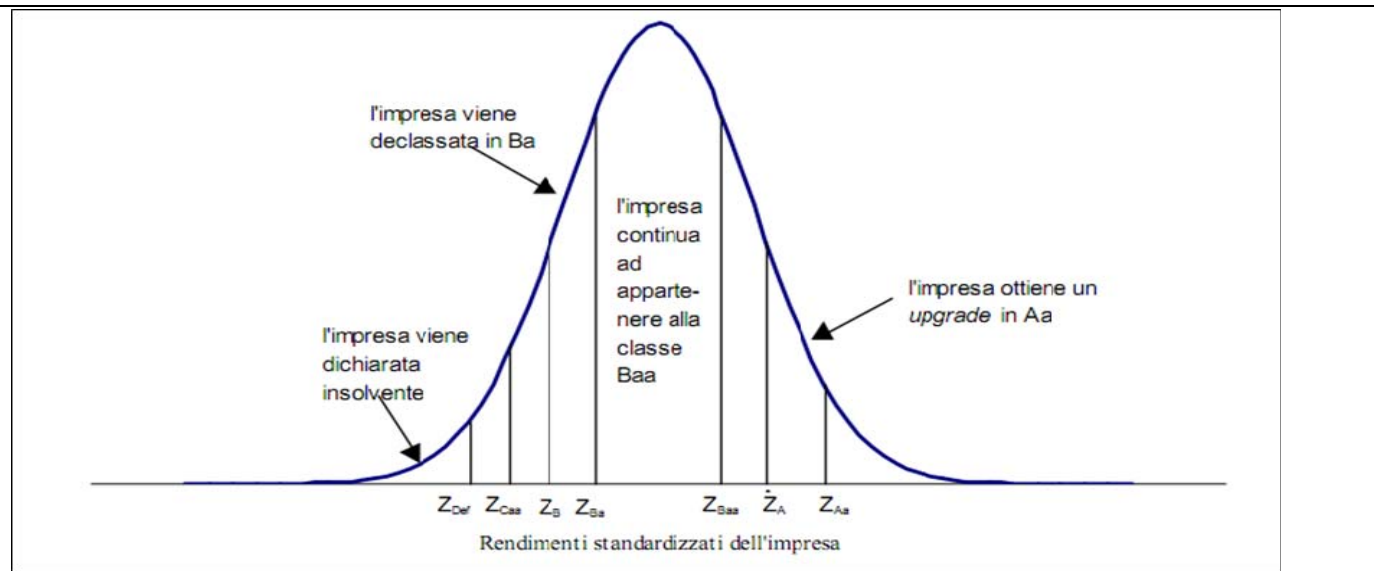
dove:

$z(i,j)$  = *threshold* per la migrazione dalla classe di *rating* iniziale  $i$  alla classe di *rating*  $j$ ;

$F(i,j)$  = tasso storico di transizioni dalla classe  $i$  alla classe  $j$  nell’arco di un 1 anno;

$F(i,D)$  = tasso storico di transizioni dalla classe  $i$  allo stato di *default* nell’arco di 1 anno;

$\Phi^{-1}$  = inversa della distribuzione normale standard cumulativa.



**Figura 1 Threshold per un emittente Baa**

Di seguito è rappresentata una matrice di transizione esemplificativa in cui la generica cella  $(x,y)$  indica la probabilità di migrazione, basata sul tasso storico di transizione medio, dalla categoria di rating iniziale  $x$  alla classe di rating  $y$ . La somma della probabilità di migrazione per ogni classe di rating iniziale deve essere pari a 1

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	D
AAA	91.69%	7.32%	0.99%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	1.08%	90.10%	8.39%	0.32%	0.09%	0.02%	0.00%
A	0.06%	1.82%	91.93%	5.50%	0.51%	0.12%	0.06%
BBB	0.02%	0.10%	3.59%	89.36%	5.57%	1.00%	0.36%
BB	0.01%	0.06%	0.34%	4.16%	85.89%	7.94%	1.60%
B	0.01%	0.03%	0.07%	0.32%	4.63%	85.24%	9.70%
D	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%

Come si evince dall'osservazione della matrice, le probabilità più elevate corrispondono allo stato di permanenza all'interno della classe di rating iniziale.

La struttura correlativa tra gli eventi di default e di migrazione dei vari emittenti in portafoglio viene presa in considerazione attraverso la dipendenza dei vari *CWI* da un insieme di *credit driver* correlati tra di loro. In particolare, la correlazione tra i *CWI* di due emittenti è data da:

$$\rho_{i,j} = \frac{Cov(Z_i; Z_j)}{\sigma_i \sigma_j} = \beta_i \cdot \Omega \cdot \beta_j$$

Più è alta l'*asset correlation*, maggiore è la probabilità che i *CWI* relativi ai due emittenti superino congiuntamente le loro *threshold* e, quindi, che si verifichino eventi creditizi congiunti.

Nella realtà non sembra essersi affermata una *market best practice*, pertanto, sono stati utilizzati due approcci alternativi, al fine di avvalorare le stime prodotte:

- Modello Benchmark
  - utilizzo degli indici borsistici dei relativi paesi come proxy del *CWI*;
- Modello di Tarashev e Zhu
  - trasformazione dei credit spread in proxy del *CWI*.

Nel presente lavoro si è scelto di considerare un unico credit driver.

In tal modo non è necessario stimare la matrice di correlazione  $\Omega$ , né le correlazioni tra coppie di emittenti, in quanto la struttura correlativa sarà riprodotta simulando gli shock dell'unico credit driver che a loro volta si rifletteranno sui *CWI* tramite i  $\beta$ .

In termini statistici si adopera il modello ad un fattore, o Market Model<sup>2</sup>, ipotizzando inoltre che sia i rendimenti del fattore di mercato sia la componente di errore seguano una distribuzione normale standard:

$$Z_{i,t} = \beta_i X_{i,t} + \sqrt{1 - \beta_i^2} \cdot \varepsilon_{i,t} \quad t=1, \dots, T$$

<sup>2</sup>In letteratura il Market Model, elaborato da Sharpe nel 1963, si presenta nella seguente forma:  $r_{i,t} = \alpha_{i,t} + \beta_i r_{m,t} + \varepsilon_{i,t}$  per  $t=1, \dots, T$ .



Avendo definito il modello per i *CWI* per i singoli emittenti, è possibile stimare i parametri di sensitività  $\beta$  per ciascun emittente attraverso il metodo dei minimi quadrati.

## 2. Modello benchmark

In tale approccio il *CWI* è rappresentato dai rendimenti degli indici borsistici dei relativi Paesi emittenti i titoli considerati. Tali indici, infatti, esprimono lo sviluppo economico di un Paese, nonché l'ampiezza, il grado di liquidità e accessibilità del mercato. In merito alla scelta del credit driver, avendo titoli europei nel portafoglio, sarebbe sembrato opportuno scegliere un indice europeo come l'MSCI Europe, che non includesse ad esempio Paesi emergenti, ma tale scelta avrebbe comportato problemi inferenziali di doppia causalità. Quando c'è casualità simultanea, ossia  $x$  causa  $y$  e  $y$  causa  $x$ , lo stimatore OLS è distorto e inconsistente. La causalità simultanea comporta una correlazione tra regressore  $x$  ed errore, e ciò contrasta con le ipotesi precedentemente illustrate relative al *CWI*.

Per tali motivazioni si è scelto di utilizzare l'indice Morgan Stanley All Country World Local<sup>3</sup>.

Le serie storiche trattate si compongono dei prezzi giornalieri degli indici All Share dei diversi paesi a partire dall'anno 2007.

La scelta della lunghezza della serie è dovuta principalmente a due motivazioni:

- coerentemente con un orizzonte di previsione di un anno e con i principi dell'analisi delle serie storiche, si è scelto un orizzonte temporale di almeno 5 anni;
- dal confronto tra l'andamento dei singoli indici nazionali con l'indice World è emerso che il co-movimento delle due variabili si modifica a partire dal 2007, presumibilmente per effetto della crisi finanziaria.

Dai prezzi si ricavano i rendimenti giornalieri, mediante le differenze logaritmiche, e si procede alla loro standardizzazione.

I rendimenti giornalieri standardizzati vengono regrediti rispetto al rendimento del credit driver, individuato nell'indice MSCI world, per ottenere i coefficienti di sensitività  $\beta$ .

Ai fini della stima del Credit-VaR ad un anno, si procede simulando gli shock dei rendimenti del credit driver ( $x_{m,t}$ ) e gli errori ( $\varepsilon_{t,t}$ ) in maniera indipendente, date le ipotesi di incorrelazione sopra specificate. Gli scenari vengono generati estraendo 10000 valori dalla distribuzione normale standardizzata.<sup>4</sup> Data la seguente formula:

$$\varepsilon_{t,t} = \beta x_{m,t} + \sqrt{1 - \beta^2} \cdot \varepsilon_{t,t}$$

è possibile, a questo punto, calcolare le  $Z_{i,t}$  per ciascun Paese in corrispondenza di ogni scenario simulato. A seconda del valore assunto dai rendimenti standardizzati si assegnerà ad essi un rating in base alle soglie ottenute dalla matrice di transizione.

Dal confronto tra i *CWI* simulati e le *migration threshold* si evince l'eventuale migrazione dei singoli titoli tra le classi di rating.

In questo modo viene simulata la migrazione congiunta di più controparti. Il valore di ogni titolo in ciascuno scenario è determinato attualizzando i flussi prospettici mediante l'utilizzo di curve dei tassi forward a un anno differenziate per classi di rating.

Per ogni scenario simulato si procede al calcolo del valore dell'intero portafoglio sommando i valori dei singoli titoli. La differenza tra i valori ottenuti e il valore del portafoglio *ante migrazione*, determinerà la distribuzione delle Profit & Loss ad un anno.

Il valore del Credit-VaR in  $T_1$  è dato dalla differenza tra il valore della distribuzione all'1% e il valor medio della stessa. Il valore così ottenuto viene attualizzato al tasso risk free ad un anno, ottenendo il Credit-VaR, all'istante di valutazione.

## 3. Modello di Tarashev e Zhu

Questo modello si basa sull'analisi del mercato dei CDS index.

Nel presente lavoro si sceglie di ricorrere al modello di Tarashev e Zhu. Si trasformano, così, i credit spreads in proxy del *CWI* attraverso i seguenti passi:

1. Si estraggono le serie storiche delle PD implicite negli asset swap spread attraverso la seguente formula<sup>5</sup>:

$$PD = \frac{1 - e^{-s}}{1 - RR}$$

dove  $s$  rappresenta lo spread, ossia la differenza tra il tasso d'interesse su investimenti rischiosi e il tasso risk-free e  $RR$  è il *recovery rate* in caso d'insolvenza;

2. Si definisce come proxy dei *CWI* per gli emittenti governativi le quantità  $\Phi^{-1}(PD, t)$ .

<sup>3</sup> L'indice Morgan Stanley All Country World Local è elaborato da Morgan Stanley Capital International Inc.. Questo indice rappresenta sia i mercati sviluppati che i mercati emergenti di 49 paesi. L'indice viene calcolato su base giornaliera. Il codice Bloomberg è MSELACWF.

<sup>4</sup> Tali estrazioni vengono effettuate sfruttando il comando di excel: Application.Run "ATPVBAEN.XLAM!Random"

<sup>5</sup> Si consideri la seguente equazione per il pricing di un titolo rischioso:  $e^{rt} = e^i(1 - PD) + e^i \cdot PD \cdot RR$

Dividendo ambo i membri per  $e^{-it}$  e tenendo conto che lo spread  $s$  è pari alla differenza tra il tasso rischioso  $i$  e il tasso risk-free, si ottiene l'espressione per PD.

Tale proxy rappresenta la variabile dipendente da regredire rispetto ai rendimenti del credit driver prescelto per ottenere i relativi coefficienti di sensitività Beta.

Una volta ottenuti i  $\beta$  si procede in analogia a quanto illustrato nel precedente approccio.

#### 4. Scelte metodologiche e alcune riflessioni

Un momento importante del lavoro è la scelta delle curve dei tassi, differenziate per classi di rating, da utilizzare per il calcolo del valore di ogni titolo differenziato per classe di rating e per singolo emittente. Si osserva che non sempre le curve dei tassi delle emissioni governative sono coerenti al relativo rating dell'emittente.

Tale ambiguità genera incoerenze circa l'ordinamento dei valori che ciascun titolo assume nelle varie classi di rating, posto che tale valore sia decrescente man mano che si sposta dalla classe AAA fino ad arrivare al default.

Ad esempio, il Portogallo, in BBB, ha tassi che non corrispondono alla relativa classe, generando in questo modo un valore addirittura più basso rispetto al valore che assumerebbe se fosse in BB, calcolato utilizzando tassi coerenti alla relativa classe.

Nel grafico seguente si riportano, a titolo esemplificativo, le curve dei tassi di Ungheria, Irlanda e Portogallo (classe BBB) per le quali si può osservare la differenza nei tassi tra le varie nazioni:

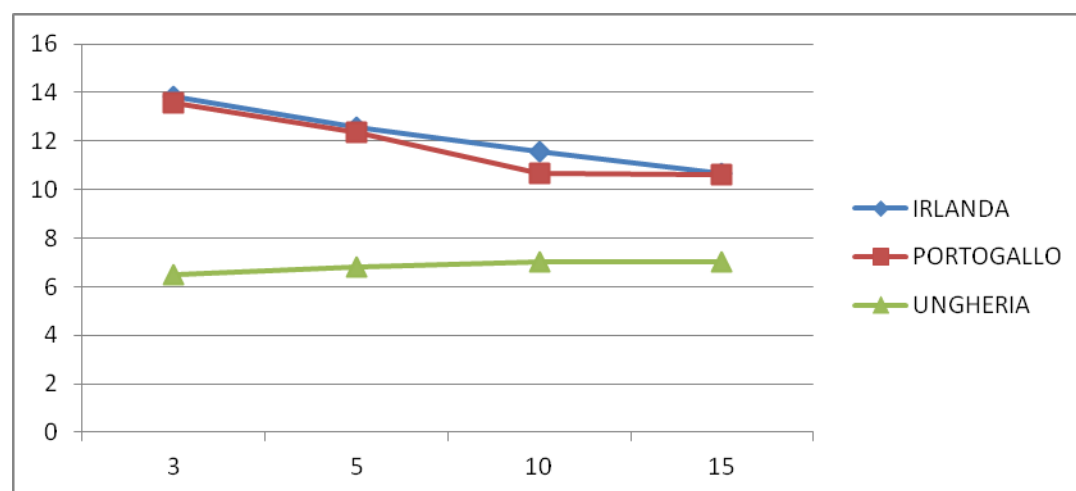


Figura 2 Confronto tra le curve degli spread di titoli BBB al 07 / 11.

Si evince come i tassi del Portogallo siano molto più alti rispetto a quelli dell'Ungheria, nonostante entrambi i paesi siano valutati BBB.

Al fine di garantire stime coerenti, per ogni categoria di rating è stata individuata un'unica curva governativa da utilizzare nelle operazioni di pricing ante e post migrazione dei titoli in portafoglio. Si rispetta, così, la rischiosità associata alle classi di rating.

Nello specifico sono state assegnate le seguenti curve di tassi per ogni classe:

AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
Germania	Italia	Spagna	Ungheria	Turchia	Irlanda	Grecia	RR

Si è proceduto a calcolare uno spread di calibrazione che, aggiunto ai tassi di rating, soddisfa l'equivalenza tra prezzo di mercato teorico, ottenuto adoperando le curve selezionate per categoria di rating, e valore di mercato, stimato mediante le curve governative,

Esemplificando, per il Portogallo si deve calcolare quale spread va aggiunto alla curva dei tassi dell'Ungheria per ottenere la curva governativa portoghese.

Questa correzione, naturalmente, non va utilizzata nei casi in cui si prezzi i titoli propri del paese utilizzato come riferimento. Da quanto detto risulta evidente come possa risultare notevole la differenza tra lo stato di salute di un'economia nazionale reale da quello percepito dai mercati finanziari. Ciò si manifesta tristemente nei riguardi del nostro paese, che, pur vantando buoni fondamentali, è oggetto di una speculazione tale da fornire delle prestazioni proprie di paesi di classe inferiore, garantendo alle istituzioni finanziarie titolari un valore del portafoglio inferiore di quello iniziale.

Non resta che rimarcare, allora, l'importanza di inserire i titoli di stato nei modelli di risk management al fine di gestire al meglio le proprie performance.

## Conclusioni

Dal confronto effettuato tra i due approcci alternativi implementati emerge una discreta discordanza nelle stime del CreditVaR espresso in percentuale sul valore complessivo dell'esposizione iniziale: 11,78% per il modello benchmark e 7,81% per il modello di Tarashev e Zhu.

Tale discrepanza è spiegata, in buona sostanza, dal diverso grado di adeguatezza degli strumenti e delle metodologie adottate nei due modelli. Mentre nel modello benchmark le stime delle *sensitivities* risultano molto significative, data la coerenza tra i CWI e il regressore prescelto (Msci World), non si può dire lo stesso per l'altro modello. Essendo i  $\beta$  molto bassi e scarsamente significativi, il peso assegnato alla componente idiosincronica risulta preponderante, da cui deriva una scarsa bontà di adattamento del modello di regressione. Ciò si riverbera, in ultima istanza, sulla struttura correlativa tra i vari emittenti in sede di simulazione, dando la parvenza di avere un portafoglio quasi completamente diversificato. E' questa la ragione per cui il Var generato con il modello di Tarashev e Zhu è più contenuto.

Va comunque sottolineato che, pur essendo particolarmente valida la scelta degli spread sulle emissioni governative come proxy del CWI, sorgono apprezzabili indecisioni in merito all'individuazione di uno o più credit driver che spieghino in maniera esaustiva l'andamento di tali variabili. Una soluzione praticabile potrebbe consistere nella scelta di credit driver diversi o complementari all'indice azionario globale, quali l'indice iTraxx Europe (indice dei CDS europei), Forex USD, il rapporto debito/PIL, i prestiti alle famiglie, le vendite industriali.

Bisognerebbe poi tener presente che la risposta della variabile dipendente nei modelli di regressione di tipo *time series*, potrebbe essere ritardata nel tempo rispetto agli shock intervenuti sui credit driver. La struttura di lag da attribuire alle serie storiche viene generalmente individuata tramite costruzione di un modello vettoriale auto regressivo (VAR).

Un'alternativa per migliorare la stima del Credit-VaR è quella di considerare contemporaneamente più credit-driver, in modo da rendere il modello più coerente con l'approccio CreditMetrics. Ad esempio considerare congiuntamente l'indice iTraxx e il rapporto debito/Pil, calcolare quindi in modo puntuale le *asset correlation* tra i paesi considerando la matrice dei credit driver. Infine seguire l'approccio simulativo per il calcolo del Credit-VaR.

Chiara Andolfo

## Bibliografia

- Sironi, "Rischio e valore nelle banche", Egea 2008.
- J. D. Amato, J. Gyntelberg, "CDS index tranche e prezzaggio delle correlazioni di rischio creditizio", Rassegna trimestrale BRI, marzo 2005.
- J.P.Morgan & Co., "CreditMetrics<sup>TM</sup> – Technical Document", New York 1997.
- O.A.Vasicek, "Probability of Loss on Loan Portfolio", KMV Corporation 1987.
- R.C.Merton, "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates", Journal of Finance, Volume 29, 1973.
- Tarashev N., Zhu H., "The pricing of correlated default risk: evidence from the credit derivatives markets", Bank and Financial Studies, n. 9/2008.

**Newsletter AIFIRM – Risk Management Magazine**

Anno 6, n° 4    Ottobre – Novembre – Dicembre 2011

**Direttore Responsabile:**

Maurizio Vallino (Banca Carige)

**Condirettore**

Corrado Meglio (Banca di Credito Popolare)

**Consiglio Scientifico:**

Paolo Giudici (Università di Pavia)

Giuseppe Lusignani (Università di Bologna)

Renato Maino (Università di Torino)

Corrado Meglio (Banca di Credito Popolare)

Fernando Metelli (Alba Leasing)

Claudio Porzio (Università Parthenope)

Gerardo Rescigno (Banca Monte dei Paschi di Siena)

Francesco Saita (Università Bocconi)

Paolo Testi (Banca Popolare Milano)

Maurizio Vallino (Banca Carige)

**Vignettista:** Silvano Gaggero

**Proprietà, Redazione e Segreteria:**

Associazione Italiana Financial Industry Risk Managers (AIFIRM), Via Sile 18, 20139 Milano

Registrazione del Tribunale di Milano n° 629 del 10/9/2004

E-mail: [segreteria@aifirm.it](mailto:segreteria@aifirm.it);

Tel. 389 6946315

Lunedì h. 10-12; da Martedì a Venerdì h.15-17

**Stampa:** Algraphy S.n.c. - Passo Ponte Carrega 62-62r

16141 Genova

**Le opinioni espresse negli articoli impegnano unicamente la responsabilità dei rispettivi autori**

**SPEDIZIONE IN ABBONAMENTO POSTALE AI SOCI AIFIRM RESIDENTI IN ITALIA, IN REGOLA CON L'ISCRIZIONE**

