

Progettazione, validazione ed implementazione di un modello reticolare avanzato per il pricing di un Flexible Forward su valute

di Pier Giuseppe Giribone (Banca Carige, Università di Genova) e Paolo Raviola (Banca Carige)

Articolo sottoposto a doppio referaggio anonimo, pervenuto in data 28/07/2019 e accettato il 20/09/2019

Abstract

Lo scopo del presente articolo è quello di valorizzare gli strumenti finanziari Flexible-Forward su divise mediante l'impiego di un approccio reticolare avanzato: l'Adaptive Mesh Method – AMM. Il Flexi-Forward (conosciuto anche come time-option forward contract) è un contratto che prevede lo scambio di un nozionale in valuta, anche parziale, in qualsiasi momento ricompreso tra due date specificate. Nel caso tale diritto non venga esercitato interamente durante la vita dell'opzione, il detentore ha l'obbligo di consegnare la parte inoptata a scadenza. In termini finanziari, tale contratto può essere scomposto in un'opzione americana call ed una opzione put barriera europea di tipo knock out, il cui livello di barriera è fissato dinamicamente in funzione dello stato di probabilità tale per cui l'opzione americana diventi in-the-money. Data tale peculiarità, diviene necessario ricorrere ad un metodo numerico. Lo schema di discretizzazione proposto in questo studio è quello di Figlewski e Gao, noto in letteratura con il nome di Adaptive Mesh Method (AMM).

L'articolo può essere suddiviso in tre parti:

- nella prima viene presentato il modello numerico AMM impiegato per il pricing di un Flexible-Forward.
- nella seconda si effettua la validazione del codice scritto in Matlab confrontando il prezzo delle due opzioni sintetiche costituenti la strategia: il fair-value della opzione call americana, calcolato con l'AMM, viene confrontato con le formule approssimate di Barone-Adesi-Whaley (1987) e Bjerksund-Stensland (1993 e 2002), mentre il prezzo dell'opzione barriera put knock-out, ottenuto con il metodo reticolare, viene confrontato con il set di formule chiuse di Reiner-Rubinstein (1991).
- nell'ultima parte viene illustrata un'applicazione reale di mercato, dimostrando come il modello di pricing sviluppato in Matlab possa essere integrato in un sistema di pricing automatico.

The purpose of this article is to illustrate the pricing model for Flexi-Forward contracts written on currencies through the use of an advanced lattice approach, called AMM – Adaptive Mesh Method. Flexi-Forward, also known as time-option forward contract, is a financial product which provides for an exchange of an agreed notional in a foreign currency in any moment between two fixed dates. If the right has not been exercised during the life of the option, the holder has to deliver the amount at maturity. In financial terms, a contract with these features can be split into an American call option and a European knock-out put barrier option, where the barrier level is dynamically fixed in function of the probability state for which the American option goes in-the-money. Given this peculiarity it is necessary to implement a numerical method in order to obtain the fair value such as the AMM model proposed by Figlewski and Gao.

This paper can be divided into three parts:

- First the AMM model used for the pricing of a Flexible Forward has been presented.
- Second we validate the code written in Matlab by comparing the price of the two synthetic options that make up the strategy. In particular, the fair value of the American call computed using AMM has been compared with the quasi-closed pricing formula developed by di Barone-Adesi-Whaley and Bjerksund-Stensland and the fair value of the standard barrier put has been validated using the analytical set of equations proposed by Rubinstein-Reiner.
- Third we conclude by showing a real market application and how these pricing routines can be implemented in an automatic pricing system.

Key Words:

Flexible Forward pricing, Time-option forward contract, Advanced Lattice Method, Adaptive Mesh Method (AMM), Automatic Pricing system, Matlab Integration

1 Studio del modello reticolare di pricing

Dal punto di vista finanziario un Flexi Forward su valute può essere scomposto in due opzioni: una call americana ed una put europea knock-out con il livello di barriera connesso allo stato di probabilità, tale per cui la call diventi in-the-money [12].

Come è noto, il pricing di un derivato, come il Flexible Forward, che consente di essere esercitato in qualsiasi istante temporale prima della sua data di scadenza, non costituisce un problema matematico di semplice soluzione, tale da poter essere trattato analiticamente. Questa libertà d'esercizio complica notevolmente la valutazione dell'opzione americana rispetto a quella di tipo europeo standard: infatti l'equazione alle derivate parziali di Black-Scholes-Merton non risulta più risolvibile in forma chiusa. Diviene pertanto necessario approssimare il problema mediante formule chiuse approssimate (quasi-closed formula) o con schemi d'integrazione numerica (ad esempio mediante la metodologia AMM [10]).

In questo paragrafo si focalizza il secondo approccio (AMM), in quanto consente di verificare, nodo per nodo, la condizione di moneyness dell'opzione americana, propedeutica alla definizione del livello di barriera per l'opzione put.

Le formule analitiche approssimate per opzioni americane [15] verranno invece affrontate nel secondo paragrafo, in quanto saranno impiegate per la validazione del codice Matlab.

Per quanto riguarda la knock-out put europea, una volta definito il livello di barriera, tale per cui la call americana diventa in-the-money, può essere implementato per la sua valutazione il set di formule chiuse di Reiner-Rubinstein [20] o impiegare una metodologia numerica.

In questo contesto si è deciso di impiegare per il pricing la tecnica AMM, particolarmente idonea alla valutazione di derivati esotici con barriera [1] e si utilizzerà, invece nel secondo paragrafo, il set di formule chiuse per la validazione dell'algoritmo.

1.1 Adaptive Mesh Models

Le metodologie numeriche di pricing di un'opzione, quali ad esempio gli alberi stocastici, fondano il loro principio sull'approssimazione della funzione di valutazione del derivato, $V(t, S_t)$, in un insieme discreto di punti nel piano (S, t) [17]. In molte occasioni la funzione $V(t, S_t)$ è altamente non lineare, sia in S che in t , conducendo ad una lenta convergenza al fair value. Si consideri, a titolo di esempio, il caso base di un'opzione put con strike price K a scadenza. La funzione del prezzo (pay-off function) nei nodi terminali dell'albero è pari a $V(T, S_T) = \Phi(S_T) = (K - S_T)^+$. Assumiamo che nell'ultimo strato dell'albero costruito, i valori dei nodi non coincidano esattamente con lo strike price. Quando si procede effettuando il primo step indietro, in accordo con la tradizionale procedura di backwardation, si determina la funzione di valorizzazione in questi punti come il valore atteso (approssimato) del pay-off a scadenza, per mezzo di una media ponderata dei valori assunti nei nodi dell'ultimo strato dell'albero [16]. Nell'intervallo che comprende lo strike, questa approssimazione sovrastima il prezzo dell'opzione a causa della convessità della funzione del pay-off. Questo tipo di errore, imputabile alla discretizzazione, diminuisce quando il numero dei nodi nell'albero è grande, dal momento che si ottengono un insieme più denso di punti in grado di interpretare meglio la non-linearità della funzione [17]. Ad ogni modo, risulta computazionalmente oneroso incrementare il numero dei nodi nell'intero albero. Al fine di risolvere tale problema e rendere l'algoritmo più efficiente, gli Adaptive Mesh Model consentono di incrementare la densità dei nodi esclusivamente nelle parti di interesse dell'albero. L'approccio più diffuso è quello di Figlewski e Gao, che hanno impiegato come base un albero trinomiale, per poi intensificare la ramificazione nelle aree di maggiore interesse (ad esempio: a scadenza o nell'intorno della barriera) senza introdurre bias nel fair value teorico di convergenza [10], [1].

La costruzione dell'albero trinomiale di base

Sotto l'assunzione di utilizzare il tradizionale framework di pricing di Black-Scholes [6], il prezzo del sottostante, S_t , segue una distribuzione lognormale per cui è ragionevole costruire l'albero di evoluzione del sottostante impiegando direttamente il logaritmo di S_t . Sia $X_t^* = \ln(S_t)$, allora la dinamica neutrale al rischio è data da:

$$dX_t^* = \alpha dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

Con $\alpha = b - \frac{\sigma^2}{2}$, b si intende il cost-of-carry che, in accordo con [15], è pari a $r - q$ per un sottostante azionario caratterizzato da un continuous dividend yield, pari a q o a $r - r_{FOR}$ per una opzione su valuta. In accordo con la letteratura, si impiega la notazione r per indicare il tasso d'interesse privo di rischio nella valuta domestica, r_{FOR} per l'interesse risk-free nella valuta estera, σ è la volatilità istantanea annualizzata dell'underlying, mentre con W_t si denota l'usuale processo stocastico di Wiener (media zero e varianza unitaria).

In accordo con gli studi di Figlewski e Gao [1], [10], il tasso di convergenza generalmente si incrementa quando l'albero è simmetrico. Quindi si è scelto di impiegare un processo modificato per X_t^* , definito $X_t = X_t^* - \alpha t$, per cui è valida la relazione $S_t = e^{X_t + \alpha t}$.

Questo processo, infatti, non ha drift ed è quindi simmetricamente distribuito rispetto a X_0 . Nell'albero trinomiale il movimento di mezzo (middle movement) è zero, mentre i movimenti up e down di X_t sono rispettivamente h e $-h$. Si denota con k la lunghezza di un singolo time-step, determinato dalla relazione: $k = \frac{T}{N}$, dove T è il tempo a scadenza dell'opzione espresso in frazione d'anno e N il numero degli intervalli di discretizzazione temporali. Si hanno, pertanto, quattro parametri non conosciuti da determinare: h e le probabilità dei movimenti di X_t : up (p_u), middle (p_m) e down (p_d).

Al fine di garantire la convergenza dell'approssimazione fornita dall'albero trinomiale per $h \rightarrow 0$, il valore atteso e la varianza devono uguagliare quelli del processo stocastico che rappresenta $X_{t+k} - X_t$. Dal momento che si è scelta una distribuzione simmetrica per l'albero trinomiale, deve essere soddisfatta la condizione sul momento primo:

$$E[X_{t+k} - X_t] = 0 = p_u h + p_m 0 + p_d (-h) \quad (2)$$

Le relazioni matematiche riguardanti il secondo ed il quarto momento (rispettivamente varianza e curtosi) consentono di scrivere:

$$E[(X_{t+k} - X_t)^2] = \sigma^2 k = p_u h^2 + p_m 0 + p_d h^2 = 2p_u h^2 \quad (3)$$

$$E[(X_{t+k} - X_t)^4] = 3\sigma^4 k^2 = p_u h^4 + p_m 0 + p_d h^4 = 2p_u h^4 \quad (4)$$

Aggiungendo la condizione che le probabilità dei movimenti deve essere pari all'unità:

$$p_m = 1 - p_u - p_d = 1 - 2p_u \quad (5)$$

Avendo un sistema di 4 equazioni e 4 incognite formato da (2), (3), (4) e (5), si riescono ad ottenere le quantità:

$$p_u = p_d = \frac{1}{6}, p_m = \frac{2}{3}, h = \sigma\sqrt{3k} \rightarrow \frac{\sigma^2 k}{h^2} = \frac{1}{3} \quad (6)$$

Una volta costruito l'albero con queste caratteristiche, si può impiegare l'usuale metodologia al fine di ricavare il valore dell'opzione. Partendo dai nodi nell'ultimo strato, si determina il valore dei prezzi dell'opzione per i vari stati: $V(T, S_T) = \Phi(S_T) = \Phi(e^{X_T + \alpha T})$ per $X_T = X_0 \pm h, X_0 \pm 2h, \dots, X_0 \pm Nh$. Si continua a ritroso, seguendo il procedimento tradizionale di backwardation (ricombinazione, eventuale controllo della convenienza ad esercitare anzitempo l'opzione, eventuale controllo di superamento della barriera), sino al nodo iniziale in corrispondenza del quale si avrà il valore dell'opzione $V(0, S_0)$.

Una magliatura più fine a scadenza

Sempre con riferimento all'esempio della put europea introdotto ad inizio del paragrafo, si presenta il concetto di mesh adattiva [17]. In questo caso l'errore più consistente introdotto dalla valutazione approssimata dell'albero trinomiale è da ricondursi all'ultimo time-step, quando si sovrastima il fair value dell'opzione in prossimità del prezzo d'esercizio. Se si raddoppiasse il numero di intervalli temporali, si otterrebbero il doppio nei nodi alla scadenza, riducendo pertanto l'errore introdotto. Operando in questo modo, tuttavia, anche il numero dei nodi nell'intero albero incrementerebbe significativamente e con esso la potenza di calcolo necessaria. Figlewski e Gao propongono con il loro approccio di intensificare la griglia dei punti solo dove serve, nell'esempio solo a scadenza [10], [17]. Con il doppio dei nodi nella mesh più fine adottata nell'ultimo time-step, si ha un passo di lunghezza $h' = \frac{h}{2}$ e per mantenere consistente la soluzione del sistema composto dalle quattro equazioni (2)-(5) si sceglie $k' = \frac{k}{4}$. Con la scelta di questi parametri, infatti, si preservano le medesime probabilità di accadimento: up, middle, down [17]. Nell'ultimo intervallo di discretizzazione dell'albero ora si hanno quattro step più piccoli, ciascuno di lunghezza $\frac{k}{4}$ ed altezza $\frac{h}{2}$. Ciò significa che in quattro piccoli passi si attua un passo di dimensione k in t e due passi di dimensione h in X . Quindi si necessita di due nodi aggiuntivi nell'albero, dal momento che si restringe di $2h$ nell'ultimo intervallo invece che di h , così si aggiungono i nodi $X_0 \pm Nh + 1$ al tempo T . La Figura 1 mostra l'albero con una magliatura più fine nell'ultimo step [17]. Grazie alla scelta appropriata di h' e k' i punti della mesh più fine risultano perfettamente allineati con i punti della mesh più grossolana.

Una magliatura più fine all'interno dell'albero

Il caso precedente permette di risolvere ottimamente il problema della valutazione di un'opzione non path-dependent. Nel caso di un'opzione, che ad esempio preveda il monitoraggio di una barriera, come nel Flexi-Forward, è necessario estendere tale approccio anche nelle porzioni intermedie dell'albero [17]. Figlewski e Gao incontrarono per la prima volta tale problema proprio nello studio di opzioni caratterizzate da barriere con monitoraggio discreto [1]. Al fine di ottenere una mesh più fine al tempo t_d , essi divisero uno step standard dell'albero trinomiale di base avente lunghezza k , in due parti, una di lunghezza $\frac{3k}{4}$ e l'altro di ampiezza $\frac{k}{4}$. Esattamente come nel caso precedente, si hanno quattro step di lunghezza $\frac{k}{4}$ che terminano allineati con i nodi appartenenti alla mesh più grossolana dell'albero al tempo $t_d - k$.

Per illustrare il concetto, si impiega nuovamente un albero a tre step e si assume che t_d sia il secondo intervallo a partire dal quale costruire la mesh (Figura 1).

Il problema che si pone è come determinare i valori dell'opzione dopo il $\frac{3k}{4}$ -step. Per i nodi posizionati sul medesimo livello della griglia più grezza, Figlewski e Gao attuano una ramificazione trinomiale [1], [10], [17]. Come nel caso standard, si imposta $p_u = p_d$, dal momento che questa soluzione soddisfa ciascun momento dispari, valore atteso incluso. Considerando l'equazione del secondo momento:

$$E \left[\left(X_{t+\frac{3k}{4}} - X_t \right)^2 \right] = \sigma^2 \frac{3k}{4} = p_u h^2 + p_m 0 + p_d h^2 = 2p_u h^2 \quad (7)$$

Dalla (6) si ha ancora la relazione $\frac{\sigma^2 k}{h^2} = \frac{1}{3}$, che significa che p_u è determinato in modo non ambiguo dalla (7) come:

$$p_u = \frac{3\sigma^2 k}{4 \cdot 2h^2} = \frac{1}{8} \quad (8)$$

Procedendo per gli altri nodi, ricompresi tra le distanze $\pm \frac{h}{2}$ e $\pm \frac{3h}{2}$, Figlewski e Gao propongono una ramificazione quadrimiale [10], [17]. Similmente, al fine di determinare le probabilità di accadimento (p_{uu} , p_u , p_d e p_{dd}), si impiegheranno le equazioni dei momenti. Assumendo una distribuzione simmetrica si ha $p_{uu} = p_{dd}$ e $p_u = p_d$, le cui probabilità ovviamente sommano a uno:

$$1 = p_{uu} + p_u + p_d + p_{dd} = 2p_{uu} + 2p_u \Leftrightarrow p_u = \frac{1-2p_{uu}}{2} \quad (9)$$

Come prima, è sufficiente risolvere l'equazione del secondo momento per ottenere un valore per p_{uu} :

$$E \left[\left(X_{t+\frac{3k}{4}} - X_t \right)^2 \right] = \sigma^2 \frac{3k}{4} = p_{uu} \left(\frac{3h}{2} \right)^2 + p_u \left(\frac{h}{2} \right)^2 + p_d \left(\frac{h}{2} \right)^2 + p_{dd} \left(\frac{3h}{2} \right)^2 = 2p_{uu} \left(\frac{3h}{2} \right)^2 + 2 \frac{1-2p_{uu}}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \Leftrightarrow (10)$$

$$\Leftrightarrow 18p_{uu} + 1 - 2p_{uu} = 3 \frac{\sigma^2 k}{h^2} = 1 \Leftrightarrow p_{uu} = 0 \quad (11)$$

Avendo dimostrato che $p_{uu} = p_{dd} = 0$, per questa categoria di nodi risulta più agevole usare una ramificazione binomiale con $p_u = p_d = \frac{1}{2}$ in sostituzione di quella quadrimiale senza introdurre distorsioni.

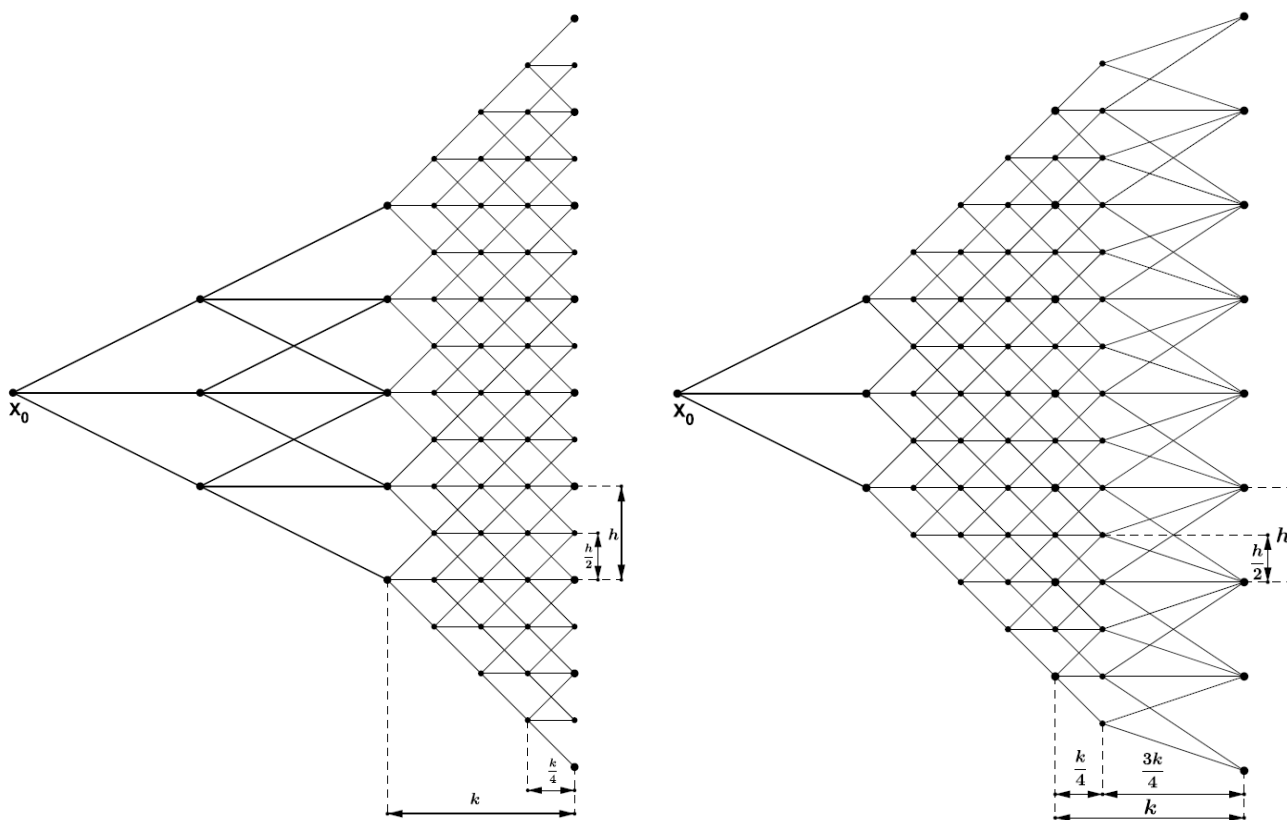


Figura 1. L'arborescenza dell'albero trinomiale di base con l'aggiunta di una mesh più fina nell'ultimo step ed in uno intermedio [17]

Un vantaggio di questa metodologia reticolare avanzata è che, operando con tale principio, la mesh può essere resa ancora più fine in maniera ricorsiva. All'interno della magliatura, le probabilità di up, down e middle sono le medesime di quelle della partizione più grossolana, così come la relazione che lega la lunghezza del passo, k' , con la sua altezza, h' :

$$\frac{\sigma^2 k'}{h'^2} = \frac{\sigma^2 \left(\frac{k}{4} \right)}{\left(\frac{h}{2} \right)^2} = \frac{\sigma^2 k}{h^2} = \frac{1}{3} \quad (12)$$

Una volta definita la struttura del reticolo in modo consistente, secondo l'approccio presentato di una magliatura adattiva possono essere seguiti i medesimi principi di valorizzazione di un'opzione, propri delle metodologie più tradizionali basati su alberi stocastici trinomiali [16].

2 Validazione del modello di pricing

Dato che il Flexible Forward può essere trattato come strategia di due opzioni: una call americana e una put barriera europea di tipo knock-out, vengono proposti in questa sede i modelli analitici approssimati (quasi-closed formula) per il pricing di opzioni americane [15] e il set di formule di Reiner-Rubinstein [20] per opzioni standard barrier. I risultati ottenuti con queste tecniche alternative di valorizzazione, dovranno essere confrontabili a quelle ottenute con la metodologia numerica dell'AMM [1], [10].

Per cui, nella prima parte ci si dedicherà alla descrizione dei modelli matematici impiegati per la validazione del codice della metodologia reticolare avanzata, seguita da un idoneo test di quadratura.

2.1 Pricing di opzioni americane mediante approssimazioni analitiche: le quasi-closed formulae

A partire dallo studio del 1977 di Roll [21] che prevedeva la stima di un'opzione americana scritta su un titolo che paga un dividendo discreto in un intervallo di tempo fissato, numerosi ricercatori hanno cercato di fornire soluzioni approssimate, ma sempre più precise e generalizzate, per opzioni che prevedevano l'esercizio anticipato. Tra questi approcci, quelli applicabili alla determinazione del fair-value di call/put su valute sono: il metodo di Barone-Adesi-Whaley (1987) [2] e l'approssimazione di Bjerksund-Stensland del 1993 [3] e riproposta nel 2002 [5].

In questo contesto verrà trattato il modo in cui questi algoritmi possono essere implementati in un ambiente di elaborazione numerica (Matlab), lasciando al lettore la consultazione dei richiami bibliografici per la dimostrazione e l'eventuale approfondimento dei risultati ottenuti.

L'approssimazione di Barone-Adesi-Whaley

L'approssimazione quadratica del metodo di Barone, Adesi e Whaley (1987) [2] può essere impiegata per prezzare opzioni call e put scritte su un asset con un costo di detenzione (cost of carry), pari a b . Quando $b \geq r$, il valore della call americana è uguale al valore della call europea e può quindi essere determinato usando la formula generalizzata di Black-Scholes (GBS formula) [15].

$$CALL(S, K, T, r, b, \sigma) = \begin{cases} c_{GBS}(S, K, T, r, b, \sigma) + A_2 \left(\frac{S}{S^*}\right)^{q_2} & , S < S^* \\ S - K & , S \geq S^* \end{cases} \quad (13)$$

Dove $c_{GBS}(S, K, T, r, b, \sigma)$ è la formula generalizzata di Black-Scholes per call europee e:

$$A_2 = \frac{S^*}{q_2} \{1 - e^{(b-r)T} N[d_1(S^*)]\} \quad (14)$$

$$d_1(S) = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (b + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (15)$$

$$q_2 = \frac{-(N_{1-2}-1) + \sqrt{(N_{1-2}-1)^2 + 4\frac{M_{1-2}}{X_{1-2}}}}{2} \quad (16)$$

$$M_{1-2} = \frac{2r}{\sigma^2} \quad (17)$$

$$N_{1-2} = \frac{2b}{\sigma^2} \quad (18)$$

$$X_{1-2} = 1 - e^{-rT} \quad (19)$$

$$PUT(S, K, T, r, b, \sigma) = \begin{cases} p_{GBS}(S, K, T, r, b, \sigma) + A_1 \left(\frac{S}{S^{**}}\right)^{q_1} & , S > S^{**} \\ K - S & , S \leq S^{**} \end{cases} \quad (20)$$

Dove $p_{GBS}(S, K, T, r, b, \sigma)$ è la formula generalizzata di Black-Scholes per put europee e:

$$A_1 = -\frac{S^{**}}{q_1} \{1 - e^{(b-r)T} N[-d_1(S^{**})]\} \quad (21)$$

$$q_1 = \frac{-(N_{1-2}-1) - \sqrt{(N_{1-2}-1)^2 + 4\frac{M_{1-2}}{X_{1-2}}}}{2} \quad (22)$$

$d_1, M_{1-2}, N_{1-2}, X_{1-2}$ medesima definizione, rispettivamente delle Equazioni (15), (17), (18), (19).

S^* è il livello di prezzo che soddisfa la (23):

$$S^* - K = c(S^*, K, T, r, b, \sigma) + \{1 - e^{(b-r)T} N[d_1(S^*)]\} S^* \frac{1}{q_2} \quad (23)$$

Chiamando:

$$\begin{cases} LHS(S_i) = S_i - K \\ RHS(S_i) = c(S_i, K, T, r, b, \sigma) + \{1 - e^{(b-r)T} N[d_1(S_i)]\} S_i \frac{1}{q_2} \end{cases} \quad (24)$$

L'equazione può essere risolta numericamente dall'algoritmo di Newton-Raphson [18], fornendo la pendenza di RHS rispetto a S_i , quantificabile come:

$$\frac{\partial RHS}{\partial S_i} = b_i = e^{(b-r)T} N[d_1(S_i)] \left(1 - \frac{1}{q_2}\right) + \left\{1 - \frac{e^{(b-r)T} n[d_1(S_i)]}{\sigma\sqrt{T}}\right\} \frac{1}{q_2} \quad (25)$$

Assegnato un valore iniziale all'algoritmo S_i , ne segue che il miglior stimatore per S_{i+1} è:

$$S_{i+1} = \frac{[K - RHS(S_i) - b_i S_i]}{(1 - b_i)} \quad (26)$$

La procedura iterativa continua fintanto che si arriva ad un errore compreso in un livello di tolleranza accettabile ξ , per esempio $\xi = 10^{-6}$:

$$\frac{|LHS(S_i) - RHS(S_i)|}{K} < \xi \quad (27)$$

Analogamente a S^* , S^{**} è il livello di prezzo che soddisfa la (28):

$$K - S^{**} = p(S^{**}, K, T, r, b, \sigma) - \{1 - e^{(b-r)T} N[-d_1(S^{**})]\} S^{**} \frac{1}{q_1} \quad (28)$$

$$\begin{cases} VS(S_j) = K - S_j \\ HS(S_j) = p(S_j, K, T, r, b, \sigma) - \{1 - e^{(b-r)T} N[-d_1(S_j)]\} S_j \frac{1}{q_1} \end{cases} \quad (29)$$

$$\frac{\partial HS}{\partial S_j} = b_j = -e^{(b-r)T} N[-d_1(S_j)] \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) - \left\{1 + \frac{e^{(b-r)T} n[d_1(S_j)]}{\sigma\sqrt{T}}\right\} \frac{1}{q_1} \quad (30)$$

$$S_{j+1} = \frac{K - HS(S_j) + b_j S_j}{(1 + b_j)} \quad (31)$$

Il seme iniziale per la routine di Newton-Raphson, suggerito da Barone-Adesi e Whaley [15], è per una call option:

$$S_{START}^* = K + [S^*(\infty) - K] [1 - e^{h_2}] \quad (32)$$

$$h_2 = -(bT + 2\sigma\sqrt{T}) \left[\frac{K}{S^*(\infty) - K} \right] \quad (33)$$

$$S^*(\infty) = \frac{K}{1 - 2[-(N_{1-2} - 1) + \sqrt{(N_{1-2} - 1)^2 + 4M_{1-2}}]}^{-1} \quad (34)$$

Per una opzione put:

$$S_{START}^{**} = S^{**}(\infty) + [K - S^{**}(\infty)] e^{h_1} \quad (35)$$

$$h_1 = (bT - 2\sigma\sqrt{T}) \left[\frac{K}{K - S^{**}(\infty)} \right] \quad (36)$$

$$S^{**}(\infty) = \frac{K}{1 - 2[-(N_{1-2} - 1) - \sqrt{(N_{1-2} - 1)^2 + 4M_{1-2}}]}^{-1} \quad (37)$$

Dove $S(\infty)$ è il livello critico di prezzo quando $T \rightarrow \infty$.

L'approssimazione di Bjerksund e Stensland del 1993

Nel 1993, Bjerksund e Stensland hanno proposto un metodo approssimato per valutare le opzioni americane su azioni, futures e valute, basato sulla definizione di un prezzo trigger I [3].

A posteriori, sulla base dei risultati applicativi, questa metodologia è risultata più efficiente per il pricing delle opzioni a lungo termine, mentre quella di Barone, Adesi e Whaley risulta maggiormente idonea in applicazione a contratti con scadenza a breve termine [15].

$$CALL = \alpha S^\beta - \alpha \phi(S, T, \beta, I, I) + \phi(S, T, 1, I, I) - \phi(S, T, 1, K, I) - K \phi(S, T, 0, I, I) + K \phi(S, T, 0, K, I) \quad (38)$$

Dove:

$$\alpha = (I - K)I^{-\beta} \quad (39)$$

$$\beta = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{b}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{r}{\sigma^2}} \quad (40)$$

La funzione $\phi(S, T, \psi, H_1, I)$ è definita nel modo seguente:

$$\phi(S, T, \psi, H_1, I) = e^{\lambda S \psi} \left[N(d_2) - \left(\frac{I}{S}\right)^\kappa N\left(d_2 - \frac{2 \ln\left(\frac{I}{S}\right)}{\sigma \sqrt{T}}\right) \right] \quad (41)$$

Con

$$\lambda = \left[-r + \psi b + \frac{1}{2} \psi(\psi - 1) \sigma^2\right] T \quad (42)$$

$$d_2 = -\frac{\ln\left(\frac{S}{H_1}\right) + \left[b + \left(\psi - \frac{1}{2}\right) \sigma^2\right] T}{\sigma \sqrt{T}} \quad (43)$$

$$\kappa = \frac{2b}{\sigma^2} + (2\psi - 1) \quad (44)$$

E il trigger price è definito come:

$$I = B_0 + (B_\infty - B_0) \{1 - e^{h(T)}\} \quad (45)$$

Dove:

$$h(T) = -(bT + 2\sigma\sqrt{T}) \left(\frac{B_0}{B_\infty - B_0}\right) \quad (46)$$

$$B_\infty = \frac{\beta}{\beta - 1} K \quad (47)$$

$$B_0 = \max\left[K, \left(\frac{r}{r-b}\right) K\right] \quad (48)$$

Se $S \geq I$, l'opzione call dovrebbe essere esercitata immediatamente ed il suo valore è dato dal suo prezzo spot: $S - K$. Viceversa, se $b \geq r$, l'esercizio dell'opzione call americana non sarà mai ottimale prima della sua scadenza ed il suo valore può essere determinato dalla GBS formula [15].

Il valore di una put americana può essere ricavato applicando la trasformazione put-call di Bjerksund e Stensland [4], secondo la quale:

$$PUT(S, K, T, r, b, \sigma) = CALL(K, S, T, r - b, -b, \sigma) \quad (49)$$

Dove $CALL(\cdot)$ è il valore della call americana con tasso privo di rischio $r - b$ e drift $-b$.

L'approssimazione di Bjerksund e Stensland del 2002

L'approccio del 2002 di Bjerksund e Stensland [5] è più preciso dei precedenti, a patto di scegliere un algoritmo accurato di approssimazione della cumulata normale bivariata, quale ad esempio l'approccio di Genz del 2004 [11], il quale è da preferirsi rispetto a quello di Drezner (1978) [8] e Drezner-Wesolowsky (1990) [9].

$$CALL = \alpha_2 S^\beta - \alpha_2 \phi_1(S, t_1, \beta, I_2, I_2) + \phi_1(S, t_1, 1, I_2, I_2) - \phi_1(S, t_1, 1, I_1, I_2) - K \phi_1(S, t_1, 0, I_2, I_2) + K \phi_1(S, t_1, 0, I_1, I_2) + \alpha_1 \phi_1(S, t_1, \beta, I_1, I_2) - \alpha_1 Y(S, T, \beta, I_1, I_2, I_1, t_1) + Y(S, T, 1, I_1, I_2, I_1, t_1) - Y(S, T, 1, K, I_2, I_1, t_1) - KY(S, T, 0, I_1, I_2, I_1, t_1) + Y(S, T, 0, K, I_2, I_1, t_1) \quad (50)$$

Dove:

$$\alpha_1 = (I_1 - K)I_1^{-\beta} \quad (51)$$

$$\alpha_2 = (I_2 - K)I_2^{-\beta} \quad (52)$$

$$\beta = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{b}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{r}{\sigma^2}} \quad (53)$$

La funzione $\phi_1(S, T, \gamma, H, I)$ è data da:

$$\phi_1(S, T, \gamma, H, I) = e^{\lambda_1 S^\gamma} \left[N(-d_3) - \left(\frac{I}{S}\right)^{\kappa_1} N(-d_4) \right] \quad (54)$$

$$d_3 = \frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right) + \left[b + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\sigma^2\right]T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (55)$$

$$d_4 = \frac{\ln\left(\frac{I^2}{SH}\right) + \left[b + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\sigma^2\right]T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (56)$$

$$\lambda_1 = -r + \gamma b + \frac{1}{2}\gamma(\gamma - 1)\sigma^2 \quad (57)$$

$$\kappa_1 = \frac{2b}{\sigma^2} + (2\gamma - 1) \quad (58)$$

E il prezzo trigger è definito:

$$I_1 = B_0 + (B_\infty - B_0)[1 - e^{h_1(t_1)}] \quad (59)$$

$$I_2 = B_0 + (B_\infty - B_0)[1 - e^{h_2(T)}] \quad (60)$$

$$h_1(t_1) = -(bt_1 + 2\sigma\sqrt{t_1}) \left(\frac{K^2}{(B_\infty - B_0)B_0}\right) \quad (61)$$

$$h_2(T) = -(bT + 2\sigma\sqrt{T}) \left(\frac{K^2}{(B_\infty - B_0)B_0}\right) \quad (62)$$

$$t_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)T \quad (63)$$

$$B_\infty = \frac{\beta}{\beta - 1}K \quad (64)$$

$$B_0 = \max\left[K, \left(\frac{r}{r-b}\right)K\right] \quad (65)$$

La funzione $Y(S, T, \gamma, H_2, I_2, I_1, t_1, r, b, \sigma)$ è data da:

$$Y(S, T, \gamma, H_2, I_2, I_1, t_1, r, b, \sigma) =$$

$$= e^{\lambda_1 T} S^\gamma \left[M(-e_1, -f_1, \rho) - \left(\frac{I_2}{S}\right)^{\kappa_1} M(-e_2, -f_2, \rho) - \left(\frac{I_1}{S}\right)^{\kappa_1} M(-e_3, -f_3, -\rho) + \left(\frac{I_1}{I_2}\right)^{\kappa_1} M(-e_4, -f_4, -\rho) \right] \quad (66)$$

Dove:

$$e_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{I_1}\right) + (b + (\gamma - \frac{1}{2})\sigma^2)t_1}{\sigma\sqrt{t_1}} \quad (67)$$

$$e_2 = \frac{\ln\left(\frac{I_2^2}{SI_1}\right) + (b + (\gamma - \frac{1}{2})\sigma^2)t_1}{\sigma\sqrt{t_1}} \quad (68)$$

$$e_3 = \frac{\ln\left(\frac{S}{I_1}\right) - (b + (\gamma - \frac{1}{2})\sigma^2)t_1}{\sigma\sqrt{t_1}} \quad (69)$$

$$e_4 = \frac{\ln\left(\frac{I_2^2}{SI_1}\right) - (b + (\gamma - \frac{1}{2})\sigma^2)t_1}{\sigma\sqrt{t_1}} \quad (70)$$

$$f_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right) + (b + (\gamma - \frac{1}{2})\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (71)$$

$$f_2 = \frac{\ln\left(\frac{I_2^2}{SH}\right) + (b + (\gamma - \frac{1}{2})\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (72)$$

$$f_3 = \frac{\ln\left(\frac{I_1^2}{SH}\right) + (b + (\gamma - \frac{1}{2})\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (73)$$

$$f_4 = \frac{\ln\left(\frac{SI_1^2}{HI_2^2}\right) + (b + (\gamma - \frac{1}{2})\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (74)$$

Il valore della $PUT(\cdot)$ è ricavabile dalla put-call transformation [4] (49).

2.2 Pricing di opzioni barriera standard mediante formule analitiche: il modello di Reiner e Rubinstein

Reiner e Rubinstein nel 1991 svilupparono un insieme di formule esatte che consentono di valorizzare opzioni barriera di tipo standard [15], [20]. Il framework di lavoro prevede un insieme di fattori comuni:

$$A = \phi S e^{(b-r)T} N(\phi x_1) - \phi K e^{-rT} N(\phi x_1 - \phi\sigma\sqrt{T}) \quad (75)$$

$$B = \phi S e^{(b-r)T} N(\phi x_2) - \phi K e^{-rT} N(\phi x_2 - \phi\sigma\sqrt{T}) \quad (76)$$

$$C = \phi S e^{(b-r)T} \left(\frac{H}{S}\right)^{2(\mu+1)} N(\eta y_1) - \phi K e^{-rT} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\mu} N(\eta y_1 - \eta\sigma\sqrt{T}) \quad (77)$$

$$D = \phi S e^{(b-r)T} \left(\frac{H}{S}\right)^{2(\mu+1)} N(\eta y_2) - \phi K e^{-rT} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\mu} N(\eta y_2 - \eta\sigma\sqrt{T}) \quad (78)$$

$$E = X e^{-rT} \left[N(\eta x_2 - \eta\sigma\sqrt{T}) - \left(\frac{H}{S}\right)^{2\mu} N(\eta y_2 - \eta\sigma\sqrt{T}) \right] \quad (79)$$

$$F = X \left[\left(\frac{H}{S}\right)^{\mu+\lambda} N(\eta z) + \left(\frac{H}{S}\right)^{\mu-\lambda} N(\eta z - 2\eta\lambda\sigma\sqrt{T}) \right] \quad (80)$$

Dove:

$$x_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + (1 + \mu)\sigma\sqrt{T} \quad (81)$$

$$x_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + (1 + \mu)\sigma\sqrt{T} \quad (82)$$

$$y_1 = \frac{\ln\left(\frac{H^2}{SK}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + (1 + \mu)\sigma\sqrt{T} \quad (83)$$

$$y_2 = \frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + (1 + \mu)\sigma\sqrt{T} \quad (84)$$

$$z = \frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T} \quad (85)$$

$$\mu = \frac{b - \sigma^2/2}{\sigma^2} \quad (86)$$

$$\lambda = \sqrt{\mu^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad (87)$$

Per le "Down-and-Out" call ($S > H$)

Pay-Off: $\max(S - K, 0)$ se $S > H$ prima di T altrimenti X al superamento della barriera H .

$$c_{DO(K>H)} = A - C + F \text{ con } \eta = 1, \phi = 1 \quad (88)$$

$$c_{DO(K<H)} = B - D + F \text{ con } \eta = 1, \phi = 1 \quad (89)$$

Per le "Up-and-Out" call ($S < H$)

Pay-Off: $\max(S - K, 0)$ se $S < H$ prima di T altrimenti X al superamento della barriera H .

$$c_{UO(K>H)} = F \text{ con } \eta = -1, \phi = 1 \quad (90)$$

$$c_{UO(K<H)} = A - B + C - D + F \text{ con } \eta = -1, \phi = 1 \quad (91)$$

Per le "Down-and-Out" put ($S > H$)

Pay-Off: $\max(K - S, 0)$ se $S > H$ prima di T altrimenti X al superamento della barriera H .

$$p_{DO(K>H)} = A - B + C - D + F \text{ con } \eta = 1, \phi = -1 \quad (92)$$

$$p_{DO(K<H)} = F \text{ con } \eta = 1, \phi = -1 \quad (93)$$

Per le "Up-and-Out" put ($S < H$)

Pay-Off: $\max(K - S, 0)$ se $S < H$ prima di T altrimenti X al superamento della barriera H .

$$p_{UO(K>H)} = B - D + F \text{ con } \eta = -1, \phi = -1 \quad (94)$$

$$p_{UO(K<H)} = A - C + F \text{ con } \eta = -1, \phi = -1 \quad (95)$$

2.3 Implementazione del modello di pricing e validazione del codice

I modelli matematici presentati sono stati scritti in codice Matlab. Al fine di effettuare la validazione, si è proceduto a confrontare il risultato numerico ottenuto impiegando l'approccio "lattice" (paragrafo 1) con le formule quasi-chiuse per opzioni americane (paragrafo 2.1) e con il set di equazioni di Reiner-Rubinstein per l'opzione standard barrier knock-out (paragrafo 2.2).

Per la call americana si è utilizzato lo scenario base:

$S = 100$ prezzo spot del sottostante

$K = 100$ prezzo d'esercizio dell'opzione

$T = 0.5$ tempo a scadenza espresso in anni

$r = 10\%$ tasso d'interesse risk-free

$b = 10\%$ cost-of-carry

$\sigma = 35\%$ volatilità annualizzata dell'underlying

La Figura 2 mostra il valore del prezzo dell'opzione call americana al variare degli intervalli di discretizzazione dell'AMM (linea continua blu). Con le linee tratteggiate si rappresentano invece i valori del medesimo derivato, ottenuti con le formule chiuse approssimate di pricing. In particolare la linea tratteggiata verde rappresenta il metodo di Barone-Adesi-Whaley, quella rossa la tecnica del 1993 proposta da Bjerksund-Stensland, mentre quella blu rappresenta la versione migliorata della stessa con caratteristiche di maggior precisione. Ad oggi, quest'ultimo approccio è considerato lo stato dell'arte per questo framework di lavoro.

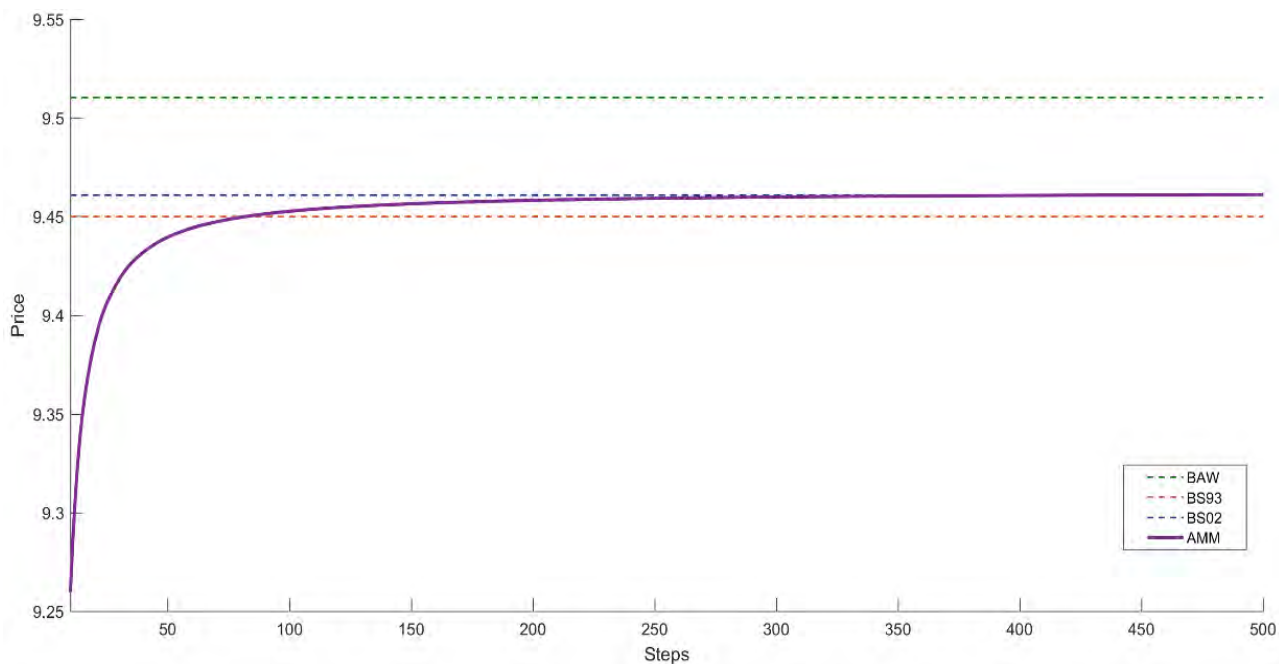


Figura 2. Convergenza del prezzo di una call americana usando la metodologia reticolare AMM

Come si può evincere, la metodologia AMM converge piuttosto rapidamente verso la miglior approssimazione, ottenuta per formula analitica [14].

Al fine di analizzare empiricamente la sensitività del prezzo rispetto ai parametri d'ingresso principali per il modello implementato, si propone la costruzione delle superfici di pricing al variare degli input, nei range: $S \in [50; 150]$, $T \in [10; 360]$ giorni (Figura 3), $K \in [50; 150]$, $\sigma \in [10\%; 90\%]$ (Figura 4)

I risultati numerici così ottenuti mantengono il medesimo livello minimale di errore riscontrato nel grafico di Figura 2.

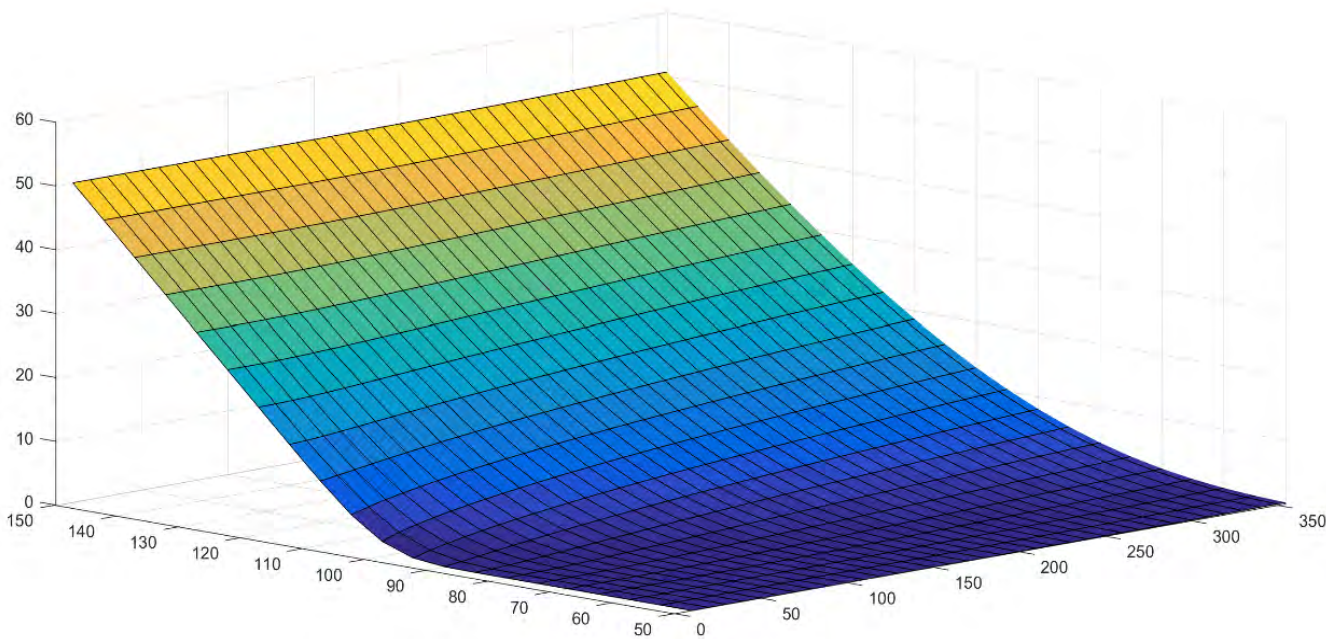


Figura 3. Pricing Surface ottenuta per $S \in [50; 150]$, $T \in [10; 360]$ giorni con il metodo reticolare AMM

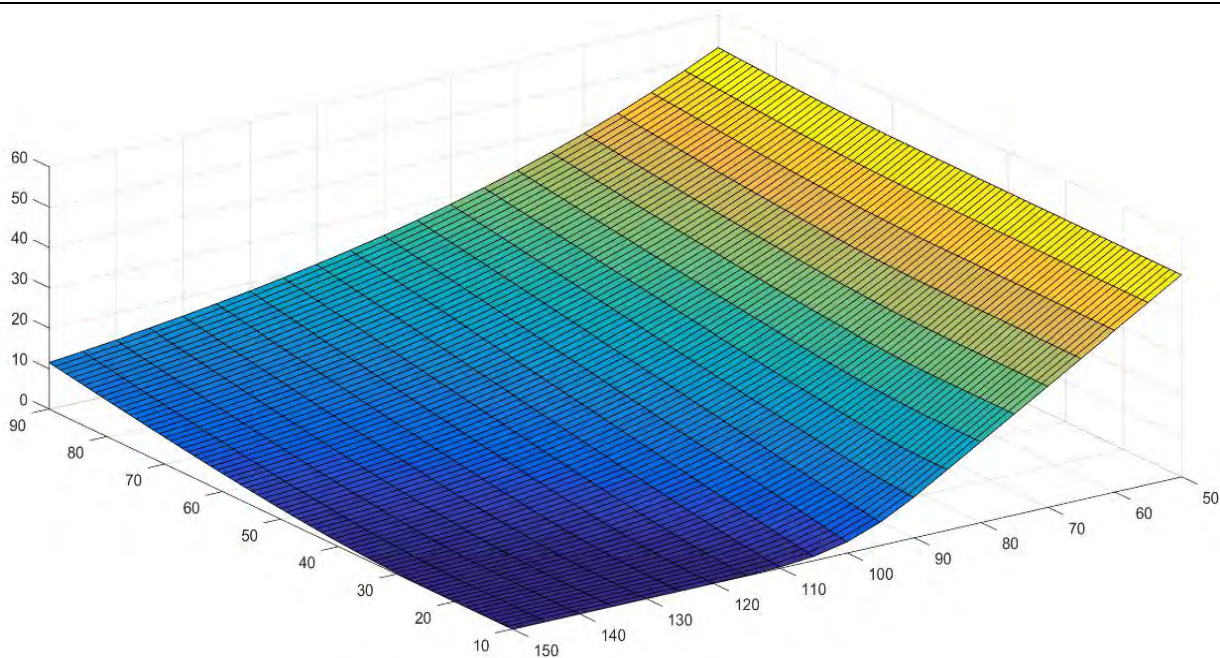


Figura 4. Pricing Surface ottenuta per $K \in [50; 150]$, $\sigma \in [10\%; 90\%]$ con il metodo reticolare AMM

Il medesimo procedimento di validazione del codice è proposto per l'opzione put barriera standard di tipo knock-out.

Il problema di pricing risolto è il seguente:

$S = 100$ prezzo spot del sottostante; $K = 110$ prezzo d'esercizio dell'opzione; $T = 0.5$ tempo a scadenza espresso in anni; $r = 8\%$ tasso d'interesse risk-free; $b = 4\%$ cost-of-carry; $\sigma = 30\%$ volatilità annualizzata dell'underlying; $H = 95$ livello della barriera continua.

Anche in questo caso l'errore di discretizzazione del metodo numerico risulta, a convergenza, inferiore rispetto alla soglia del centesimo ed è pari a 2.62 [15].

3 Applicazione ad un caso di mercato

Si propone di valutare, con la metodologia di pricing presentata nel paragrafo 1 e validata nel paragrafo 2, i due prodotti Flexi-Forward scritti sul cambio EUR/YEN.

I dati di mercato del 20 Luglio 2019 e le caratteristiche finanziarie per la valorizzazione del Flexi-Forward avente $K > S$ sono:

Settle Date: 20/07/2019
 Maturity Date: 21/07/2020
 Discretization Scheme: Adaptive Mesh Method
 Risk Free Rate (EUR Depo): -0.681%
 Forward: 121.10
 Foreign Risk Free Rate (JPY Depo): 0.304%
 Spot: 120.87
 Direction: Client buys USD – Cash EUR
 Strike Price: 122.92
 Volatility: 6.802% / 7.304% (mid valuation)
 Dati di mercato: Bloomberg®

Il prezzo ottenuto per tale strumento è pari a -1.70% (premio espresso nella valuta domestica - EUR).

Per quanto riguarda il caso del Flexible-Forward avente $K < S$, i dati di input impiegati sono:

Settle Date: 20/07/2019
 Maturity Date: 21/07/2020
 Discretization Scheme: Adaptive Mesh Method
 Risk Free Rate (EUR Depo): -0.681%
 Forward: 121.10
 Foreign Risk Free Rate (JPY Depo): 0.304%
 Spot: 120.87
 Direction: Client buys JPY – Cash EUR
 Strike Price: 119.29

Volatility: 7.184% / 7.692% (mid valuation)

Dati di mercato: Bloomberg®

In questa seconda applicazione il fair-value dello strumento risulta pari a +1.31% (premio espresso nella valuta domestica - EUR). Tali valutazioni sono state riprodotte impiegando il modulo di valutazione Bloomberg® per opzioni su tassi di cambio (OVML EURJPY FLEX) e si sono ottenuti fair value molto prossimi al benchmark di mercato (la discrepanza, come si evince dalla Figura 5, è inferiore al basis point).

Essendo, quindi, confidenti della bontà del modello implementato, il codice prodotto risulta idoneo ad essere compilato in una dll per il DOT .NET framework ed interfacciato con un sistema di pricing automatico [13], [19].

The screenshot displays the Bloomberg OVML interface for an 'OVML EURJPY FLEX' instrument. The main window shows the following data:

| Field | Value |
|----------------|----------------------------|
| Price Date | 07/20/19 15:49 |
| Asset | EURJPY |
| Spot | Mid 120.87 |
| Style | Flexi Forward |
| Exercise start | 07/22/19 |
| Exercise end | 07/21/20 |
| Direction | Client buys JPY / Cash EUR |
| Expiry | 369 days mm/dd/yy |
| Delivery | NY 10:00 07/27/20 |
| Rate | 122.92 1.50% OTHF |
| Notional | JPY 1,000,000.00 |
| Model | BS - PDE |

Below the main data, the 'More Market Data' section shows:

| Vol | BGN | Vol | Value |
|--------|--------|-----|-------|
| 6.802% | 7.304% | | |

The 'Results' section shows:

| Field | Value |
|-----------|--------------|
| Price | 1.6971% P |
| Premium | EUR 138.07 P |
| Prem Date | 07/24/19 |
| Delta | -101.7044% |
| Hedge | 8,273.95 |

Figura 5. Esempio di quadratura del prezzo di mercato di un Flexible Forward. Caso: $K > S$. Fonte: Bloomberg® OVML module

4 Implementazione della libreria di pricing in un sistema di pricing automatico

La soluzione proposta al fine di integrare il modello matematico trattato all'interno del sistema automatico di pricing, consiste nella compilazione di una libreria dll per Windows, in grado di esportare la funzione principale di valutazione dello strumento. In ingresso richiede sia i dati finanziari del contratto (come: ammontare, scadenza, strike, Cross divide, ...), sia le strutture a termine delle variabili di mercato (come volatilità, tassi d'interesse, punti forward sui cambi), da cui ricavare i valori necessari per sviluppare la struttura reticolare AMM. L'intera attività di pricing avviene all'interno delle routine della libreria, che richiama ricorsivamente il modello di sviluppo della struttura ad albero per poi restituire, come output, il fair value e le greche stimate in modo numerico tramite differenze finite.

Quest'ultima, in quanto libreria, non può comunque operare da sola e necessita di una struttura che le fornisca i dati in ingresso ed elabori i valori in restituzione. Non essendo generalizzabile il collegamento tra programma principale e libreria a livello di runtime, si è provveduto a costruire un 'involucro' di raccordo tra la libreria e l'utilizzatore, procedura denominata nel gergo tecnico come "wrapper". Nella fattispecie si è creato dapprima uno strato di interfaccia con Excel, al fine di poter verificare le funzionalità e le performance del modello. Raggiunto un buon grado di confidenza sulla sua robustezza tecnica, si è poi provveduto ad innestare la libreria nel gestore dei motori di pricing e ad interfacciarla col prodotto principale di gestione degli strumenti derivati complessi e definiti dall'utente.

Questo prodotto (Prisma®), sviluppato in C#, colloquia con l'applicativo principale tramite il protocollo RendezVous® e da esso riceve, rimanendo in ascolto, le richieste di valutazione e tutti i parametri di mercato necessari ad una corretta valorizzazione. Qualora i dati in ingresso siano incompleti (missing data problem [7]) o non espressi in forma direttamente lavorabile (ovvero debbano ancora essere bootstrappati), provvede ad esprimerli nella forma idonea ad essere lavorati dalla libreria. In base alla tipologia di strumento per cui viene richiesta la valutazione, il prodotto sceglierà, tra i vari 'motori' (librerie e modelli) a disposizione quello più idoneo alla valutazione e, nel nostro caso, la libreria di valorizzazione dei Flexi-forward che contiene il modello reticolare avanzato (Adaptive Mesh Method).

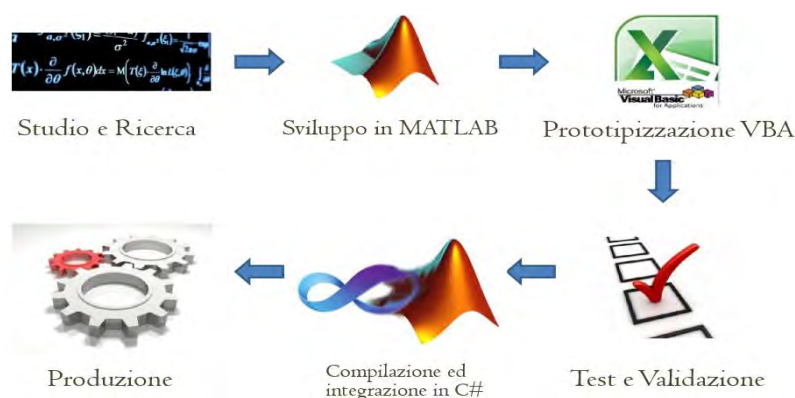


Figura 6. Esempificazione del processo di integrazione della libreria di calcolo Matlab in ambiente di produzione [13]

5 Conclusioni

Questo articolo è incentrato sul tema della valutazione di un contratto Flexi-Forward su valute: strumento molto popolare nei mercati finanziari, ma che è difficile riferire ad una letteratura scientifica esaustiva su tale argomento. Gli autori hanno approcciato il problema scomponendo il prodotto in due opzioni: una call americana e una knock-out barrier put, il cui livello di barriera è calcolato dinamicamente in funzione della probabilità per cui la call americana diventa in-the-money. Per lo sviluppo di tale oggetto si è ricorso ad una metodologia numerica al fine di risolvere il problema di pricing. In questo articolo si è optato per implementare un approccio reticolare avanzato, noto in letteratura con il nome di AMM – Adaptive Mesh Method, che è stato applicato sia per quantificare la convenienza ad esercitare la call anticipatamente, sia per la determinazione dinamica del livello di barriera per quanto riguarda la put. Lo studio ha trattato la parte teorica di implementazione del modello di pricing e la parte di validazione, fornendo evidenza della quadratura del prezzo sia con modelli teorici analitici affini, sia con quotazioni di mercato dello strumento. L'articolo si conclude mostrando come il codice, sviluppato in Matlab, possa essere integrato in un motore automatico di pricing.

Pier Giuseppe Giribone e Paolo Raviola

Bibliografia

- [1] Ahn D. H., Figlewski S., Gao B., "Pricing discrete barrier options with an Adaptive Mesh Model", The Journal of Derivatives, Vol. 6, N. 4, 33-43 (1999)
- [2] Barone-Adesi G., Whaley R. E., "Efficient analytic approximation of American option values", Journal of Finance, Vol. 42, N. 2, (87)
- [3] Bjerksund P., Stensland G., "Closed-form approximation of American options", Scandinavian Journal of Management, Vol. 9, (93)
- [4] Bjerksund P., Stensland G., "American exchange options and a put-call transformation: a note", Journal of Business Finance and Accounting, Vol. 20, N. 5, 761-764 (1993)
- [5] Bjerksund P., Stensland G., "Closed-form valuation of American options", Working paper (2002)
- [6] Black F., Scholes M., "The pricing of options and corporate liabilities", Journal of Political Economy, Vol. 81, 637-654 (1973)
- [7] Caligaris O., Giribone P. G., Neffelli M., "Ricostruzione di superfici di volatilità mediante l'utilizzo di reti neurali auto-associative: un caso studio basato sull'analisi non lineare delle componenti principali", Risk Management Magazine, Vol. 12, N. 3 (2017)
- [8] Drezner Z., "Computation of the bivariate normal integral", Mathematics of Computation, Vol. 32, 277-279 (1978)
- [9] Drezner Z., Wesolowsky G. O., "On the computation of the bivariate normal integral", The Journal of Statistical Computation and Simulation, Vol. 35, N.1-2, 101-107 (1990)
- [10] Figlewski S., Gao B., "The adaptive mesh model: a new approach to efficient option pricing", Journal of Financial Economics, Vol. 53 (99)
- [11] Genz A., "Numerical computation of rectangular bivariate and trivariate normal t probabilities", Statistics and computing, Vol. 14, (04)
- [12] Giribone P. G., Ligato S., "Flexible-forward pricing through Leisen-Reimer trees: implementation and performance comparison with traditional Markov chains", International Journal of Financial Engineering, Vol. 3, N. 2 (2016)
- [13] Giribone P. G., Raviola P., "MATLAB in Banca Carige: determinazione del Credit and Debt Valuation Adjustment (CVA/DVA)", Conference Proceedings: MATLAB Expo – Milano (2014)
- [14] Giribone P. G., Ventura S., "Studio della convergenza dei modelli di pricing discreti multinomiali azionari: teoria e applicazioni con tecniche di controllo dell'errore", AIFIRM Magazine, Vol. 6, N. 1, 24-35 (2011)
- [15] Haug E. G., "The complete guide to option pricing formulas", 2nd edition, Mc Graw Hill (2007)
- [16] Hull J. C., "Options, Futures and other derivatives", 8th edition, Prentice Hall (2012)
- [17] Nordström W., "Adaptive tree techniques in option pricing", Master's thesis in scientific computing, Royal Institute of Technology, School of Engineering Sciences, Stockholm, Sweden (2015)
- [18] Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P., "Numerical Recipes in C - The art of scientific computing", 2nd edition, Cambridge University Press (1992)
- [19] Raviola P., Giribone P. G., Ligato S., "Carige Bank integrates a MATLAB based valuation library with its enterprise pricing and risk platform – case study", MathWorks User-Story Journal (2013)
- [20] Reiner E., Rubinstein M., "Breaking down the barriers", Risk Magazine, Vol. 4, N. 8, 28-35 (1991)
- [21] Roll R., "An analytical valuation formula for unprotected American call options on stocks with known dividend", Journal of Financial Economics, Vol. 5, 251-258 (1977)



RISK MANAGEMENT MAGAZINE

Anno 14, numero 3

Settembre – Dicembre 2019

Poste Italiane - Spedizione in abbonamento postale – 70% aut. DCB / Genova nr. 569 anno 2005

TESTATA INDIPENDENTE CHE NON PERCEPISCE CONTRIBUTI PUBBLICI (legge 250/1990)

In collaborazione con



IN QUESTO NUMERO

ARTICOLI A CARATTERE DIVULGATIVO

| | |
|---|--|
| 3 | The European path towards a sound Pillar 2 framework for banks di Francesco Cannata, Raffaele Arturo Cristiano, Simona Gallina e Michele Petronzi |
| 9 | Principi di proporzionalità e di bilanciamento Regole e supervisione delle imprese bancarie in Europa e negli Stati Uniti di Rainer Masera |

ARTICOLI A CARATTERE SCIENTIFICO (sottoposti a referaggio)

| | |
|----|--|
| 13 | L'impatto sulle PD IFRS 9 della nuova definizione di default di Maria Giovanna Zavallone, Francesco Merlo e Andrea Morciano |
| 20 | Risk trend in fintech disruption from a common good view di Federica Sist |
| 25 | Progettazione, validazione ed implementazione di un modello reticolare avanzato per il pricing di un Flexible Forward su valute di Pier Giuseppe Giribone e Paolo Raviola |

Risk Management Magazine

Anno 14 n° 3 Settembre - Dicembre 2019

Direttore Responsabile:

Maurizio Vallino

Condirettore

Corrado Meglio

Consiglio scientifico

Giampaolo Gabbi (Direttore del Consiglio Scientifico), Ruggero Bertelli, Paola Bongini, Anna Bottasso, Marina Brogi, Ottavio Caligaris, Rosita Coccozza, Simona Cosma, Paola Ferretti, Andrea Giacomelli, Pier Giuseppe Giribone, Adele Grassi, Valentina Lagasio, Duccio Martelli, Laura Nieri, Pasqualina Porretta, Anna Grazia Quaranta, Francesco Saita, Enzo Scannella, Cristiana Schena, Giuseppe Torluccio.

Comitato di redazione

Ilaria Andreani, Emanuele Diquattro, Fausto Galmarini, Igor Gianfrancesco, Rossano Giuppa, Aldo Letizia, Enrico Moretto, Paolo Palliola, Enzo Rocca, Fabio Salis

Vignettista: Silvano Gaggero

Proprietà, Redazione e Segreteria:

Associazione Italiana Financial Industry Risk Managers (AIFIRM), Via Sile 18, 20139 Milano

Registrazione del Tribunale di Milano n° 629 del 10/9/2004

ISSN 2612-3665

E-mail: risk.management.magazine@aifirm.it; Tel. 389 6946315

Stampa: Algraphy S.n.c. - Passo Ponte Carrega 62-62r 16141 Genova

Le opinioni espresse negli articoli impegnano unicamente la responsabilità dei rispettivi autori

SPEDIZIONE IN ABBONAMENTO POSTALE AI SOCI AIFIRM RESIDENTI IN ITALIA, IN REGOLA CON L'ISCRIZIONE

Rivista in stampa il 2 Dicembre 2019



Rivista accreditata AIDEA