RISK MANAGEMENT MAGAZINE

Vol. 18, Issue 3
September – December 2023

EXCERPT

https://www.aifirm.it/rivista/progetto-editoriale/

The link between MiFID and Risk Appetite Framework as an application of best practices for wealth management and the entire value chain of the financial industry

Gianluca Macchia, Emanuele De Angelis, Michele Vitagliano

The link between MiFID and Risk Appetite Framework as an application of best practices for wealth management and the entire value chain of the financial industry

Gianluca Macchia (Studio Tridente-Macchia); Emanuele De Angelis (Banca Generali S.p.A); Michele Vitagliano (Università di Bari)

Abstract

After a short review of the MiFID regulations and the RAF, the paper identifies the link between them which allows to mitigate a balance sheet risk sustained by the financial intermediary and, at the same time, to improve its stability and value creation, through a maximization of customer loyalty. The client's attitude towards risk can be summarized in these terms: "I don't like risk, but I like to win". Thus, a three-dimensional approach towards expected utility is suggested for estimating risk tolerance: risk aversion, loss aversion and reflection. In addition, a definition of the client's financial objectives is required, combined with greater disclosure - which allows the construction of a financial statement – to attest that risk-taking is indeed a luxury, as indicated by the metrics of the discretionary wealth ratio, and therefore, of the Standard of Living Risk (SLR). The next step consists in the determination of a set of portfolios along the efficient frontier where risk is represented by the expected shortfall, the determination of which belongs to a Generalized Extreme Value Theory logic. The client's objectives are described in terms of probability of success, where the latter is a function of an initial endowment, a potential positive contribution of financial resources over time as well as an expected return level. The above is expressed through a practical case that envisages the determination of a set of EGPF portfolios and the identification of the specific portfolio, obtained as a solution to a static and dynamic optimization problem, where the objectives have been formalized through the calculation of the associated utility.

1. Introduzione

L'operato del Regolatore europeo, in merito all'offerta di prodotti finanziari, può essere sintetizzato attraverso un insieme di concetti fondamentali. Più nello specifico, in un contesto di Risk Management, tali concetti chiave sono riassumibili nella relazione tra tolleranza al rischio (risk tolerance) e propensione al rischio (risk appetite). Negli ultimi anni, a seguito dell'attenzione dedicata alla tolleranza e alla propensione al rischio degli investitori, si è assistito all'introduzione del questionario MiFID, declinando questi concetti in una profilatura del cliente. Tale strumento si configura come il principale mezzo per acquisire informazioni dettagliate creando un legame tra conoscenza ed esperienza del cliente dei mercati finanziari e la sua propensione al rischio. Quasi contemporaneamente, in risposta alla Grande Crisi Finanziaria del 2007-2009, l'introduzione del Risk Appetite Framework (RAF) ha consentito agli istituti finanziari di dotarsi di pratiche volte a far interagire la misurazione degli obiettivi di rischio con la solidità patrimoniale così da migliorare, in ultima istanza, la stabilità del sistema finanziario nel suo complesso. Contrariamente a quanto possa emergere da un primo superficiale confronto, diviene fondamentale integrare la conoscenza e la profilatura del cliente acquisita tramite MiFID in un quadro più ampio che governa i principi cardine della rischiosità degli Istituti di credito: la definizione del Risk Appetite Framework non può non includere le informazioni richieste ed estrapolate dal questionario MiFID. Il processo di definizione della governance di rischio e del capitale risulta limitata qualora non sia pienamente armonizzata con l'evoluzione del business che, di concerto alle componenti di ricavo (gli asset), lavorano nella stesura dei piani industriali. L'attenzione al cliente, alle sue priorità ed alla propensione al rischio, rappresenta uno dei temi più complicati e più impattanti nella definizione di un sistema volto alla crescita sostenibile raggiungibile togliendo l'elemento aleatorio e volatile delle fonti di finanziamento che impattano la redditività stessa. Le ragioni di cui sopra sono alla base della ricerca che si vuole analizzare in questo lavoro, ovvero: l'intermediario finanziario potrebbe trarre notevoli vantaggi nella mitigazione del balance sheet risk se riuscisse a comprendere approfonditamente l'atteggiamento "reale" del cliente nei confronti del rischio, adottando, in fase di definizione degli obiettivi di investimento, un approccio che fa leva ed integra le informazioni richieste dal questionario MiFID. Oltre a ciò, una più approfondita comprensione delle necessità e degli atteggiamenti del cliente permetterebbe all'intermediario finanziario di conseguire una maggiore fidelizzazione con conseguenti benefici tangibili in termini di stabilità e crescita aziendale. Per conseguire tali obiettivi, è necessario, tuttavia, abbandonare la concezione tradizionale della finanza che considera l'investitore preoccupato solo del rapporto rischio e rendimento del portafoglio. Il concetto di rendimento e rischio deve essere unito al concetto di "utilità" valutata attraverso tre dimensioni: risk aversion, loss aversion e reflection mediante una modalità "lottery-style". Inoltre, si evidenzia come una maggior conoscenza del cliente rifletta una maggior probabilità di fidelizzazione che implica un maggiore livello di fiducia e trasparenza riguardo la gestione della sua completa situazione patrimoniale, economica e finanziaria, che consente di determinare una misura di discretionary wealth ratio e quindi di standard living risk (SLR). Il metodo proposto in questo lavoro si caratterizza come innovativo in quanto, utilizzerà un set di portafogli d'investimento posizionati sulla frontiera efficiente, considerando il rischio in termini di expected shortfall legata ad una distribuzione Frechét o Gumbel, appartenenti alla teoria delle extreme value (EVT). Tale scelta è dettata dalla maggiore resilienza di questa distribuzione rispetto a quanto utilizzato nelle attuali modalità che legano la determinazione della frontiera ottimale all'utilizzo di una distribuzione normale o lognormale approcciando il mercato in ottica "prudenziale". Inoltre, il raggiungimento degli obiettivi del cliente, in una versione realistica di multi-obiettivo, è espresso in termini di probabilità di successo, collegata direttamente a una dotazione iniziale, a contributi temporali ed a una misura di rendimento del portafoglio nel tempo. L'approccio metodologico proposto in questo lavoro viene declinato su un caso pratico in cui, a seconda dei livelli di risk aversion, loss aversion e reflection, si perviene alle diverse caratterizzazioni dei portafogli d'investimento (EGPF), ottenute attraverso la risoluzione di un problema di ottimizzazione statica finalizzato al raggiungimento, in base ai relativi livelli di importanza, degli obiettivi definiti con il cliente ed espressi mediante una funzione di utilità associata.

2. MIFID II e la futura MIFID III

I cambiamenti della regolamentazione finanziaria hanno cercato di seguire l'innovazione finanziaria che è giunta sui mercati e quindi sugli investitori, in particolare quelli retail. Come sappiamo tutto nasce nel 2007 quando la direttiva 2004/39/CE, meglio nota come MiFID, che intende armonizzare le diverse normative nazionali europee oltre a migliorare il sistema di tutela degli investitori. In particolare, va a dettare nuove regole relativamente alla condotta degli intermediari finanziari, classificando la clientela tra retail, qualificata e istituzionale, introducendo per la prima volta regole sui conflitti d'interesse ed inquadrando la consulenza finanziaria tra

le attività riservate così come introduce l'obbligo da parte degli intermediari di comunicare la presenza d'inducements. Tutto ciò per arginare un'asimmetria informativa tra intermediari finanziari e clientela retail. Vengono introdotti per la prima volta concetti come adeguatezza ed appropriatezza, con la prima che fa leva sulla conoscenza ed esperienza in materia d'investimenti (1), situazione finanziaria – reddituale e patrimoniale (2), obiettivi d'investimento (3) e propensione al rischio (4). Appropriatezza che, invece, fa leva su un ridotto numero di elementi da parte dell'investitore. Rimane, tuttavia, ammessa un'operatività in execution only. La consulenza finanziaria viene definita attraverso tre livelli di servizio che si distinguono attraverso regole differenti di comportamento per l'intermediario che è tenuto a rispettare in luogo delle raccomandazioni fornite al cliente. Approvata nel 2014 con la direttiva 2014/65/CE ed entrata in vigore nel gennaio 2018, la direttiva MiFID II ha come scopo quella di migliorare la protezione dell'investitore attraverso un approccio maggiormente incentrato sulla trasparenza degli intermediari finanziari. In particolare, la nuova normativa detta i principali cambiamenti:

- **Product Governance & Target market**: viene previsto un controllo ex-ante gravante sia sulle società di gestione del risparmio (SGR) che devono definire un target market.
- **Requisiti professionali richiesti allo Staff**: per garantire un elevato *standard* di professionalità nel miglior interesse dei clienti, vengono declinati i requisiti professionali tali da assicurare il possesso di una qualifica adeguata ed una congrua esperienza.
- **Inducements**: nella prestazione del servizio di consulenza "su base non indipendente", si prevede che gli inducements debbano superare quanto previsto dal test di ammissibilità, che ne misura il beneficio tangibile per il cliente, in una logica di miglioramento della qualità del servizio adeguate.
- **Adeguatezza**: viene ristretto il campo dei prodotti finanziari per i quali sia ammesso il servizio "execution only"
- **Costi**: devono essere indicati al cliente in modo aggregato e regolare.

Per quest'ultimo punto, negli ultimi anni la normativa si è in parte focalizzata su una miglior trasparenza dei costi attraverso informative ex-ante ed ex-post mediante documentazioni dedicate che nella versione ex-post prende il nome di rendiconto MiFID dei costi. Parte del risultato, lato cliente, è il questionario MiFiD che cerca di ottemperare la definizione del profilo di rischio e quindi del livello di propensione e tolleranza al rischio, tenuto conto degli obiettivi finanziari che in tal sede è possibile desumere. Nell'attesa poi della Mifid III, il 25 maggio 2023 la Commissione europea ha pubblicato la Retail Investment Strategy che modifica il regolamento sui prodotti di investimento al dettaglio e assicurativi preassemblati (PRIIP). Essa pone l'attenzione certamente su alcuni temi, che saranno oggetto della normativa che verrà. In particolare, si prevede per i distributori di segnalare come essi debbano identificare e quantificare tutti i costi di distribuzione e valutare se quest'ultimi siano giustificati e proporzionati. Se un prodotto, insieme ai costi di distribuzione, si discosta dal benchmark, l'impresa sarà autorizzata a distribuirlo solo se ulteriori test e valutazioni stabiliranno che i costi e gli oneri sono comunque giustificati e proporzionati. Nel caso opposto, ossia se i distributori non potessero giustificare tali costi, dovrebbero prendere in considerazione la possibilità di ricorrere a fornitori alternativi. In regime di "consulenza finanziaria", le proposte d'investimento devono prevedere la raccomandazione di un prodotto più efficiente in termini di costi tra quelli identificati come adatti al cliente e che offrono caratteristiche simili. Devono inoltre raccomandare, tra la gamma di prodotti individuati come idonei, uno o più prodotti privi di caratteristiche aggiuntive che non siano necessarie per raggiungere gli obiettivi di investimento del cliente e che comportino costi aggiuntivi, dove i criteri saranno definiti attraverso successivi atti delegati. Relativamente agli inducements la decisione della Commissione Europea è stata quella di proporre un "approccio graduale" tale da permettere ai distributori di modificare i propri sistemi e ridurre al minimo i costi di un tale cambiamento. Si prevede, dopo un periodo di tre anni dall'adozione di tali misure, una valutazione sugli effetti degli incentivi con eventuali misure legislative che potrebbero portare ad un loro divieto. Inoltre, si afferma come l'adeguatezza e l'appropriatezza debbano essere considerati a livello di portafogli complessivo del cliente. Ma può essere evitata, e quindi i consulenti finanziari non necessitano d'informazioni sulle conoscenze ed esperienze del cliente o sulla composizione del suo portafoglio esistente, laddove siano interessati solo prodotti ben diversificati, non complessi ed efficienti in termini di costi. Quindi si mantiene l'adeguatezza solo nel caso di prodotti complessi.

3. Risk Appetite Framework

Come sappiamo, la governance interna è una delle principali priorità del Single Supervisory Mechanism (SSM) e uno degli elementi chiave del Supervisory Review and Evaluation Process (SREP). In un ambiente che si modifica – con particolare riferimento alle dimensioni economiche, finanziarie, competitive e soprattutto normative – è fondamentale considerare il proprio profilo di rischio complessivo in un'ottica di sostenibilità del modello, l'attenzione è sempre più spostata sulla capacità di implementare una sana governance. In poche parole, ciò vuol dire implementare le best practices relative al Risk Appetite Framework. Tale impostazione la troviamo rispettata in tutte le banche, che tuttavia vedono considerato un approccio proporzionato per tener conto delle dimensioni, del modello aziendale e del livello di complessità delle stesse. L'SSM pone alte aspettative nei confronti dei board delle banche, dove quest'ultimi hanno il compito di contestare, approvare e supervisionare l'attuazione da parte del management degli obiettivi strategici, della governance e della cultura aziendale. Per questo motivo, il board dovrebbe includere una prospettiva di rischio nelle discussioni strategiche e dimostrare un'efficace supervisione delle funzioni di rischio e controllo, e per questo motivo dovrebbe essere fortemente coinvolto nel processo di validazione e monitoraggio del Risk Appetite Framework. L'SSM si aspetta inoltre che le banche sviluppino e istituiscano un RAF completo, che dovrebbe aiutarle a rafforzare la consapevolezza del rischio e a promuovere un'adeguata cultura del rischio. Come prerequisito per una sana gestione del rischio, il RAF dovrebbe definire il livello di tolleranza al rischio che l'ente è disposto ad assumere in relazione sia ai rischi finanziari che a quelli non finanziari. I parametri e i limiti di rischio dovrebbero essere implementati in modo coerente all'interno delle entità e delle linee di business e dovrebbero essere monitorati e segnalati regolarmente al consiglio. Il RAF dovrebbe inoltre rimanere allineato al piano aziendale, allo sviluppo della strategia, alla pianificazione del capitale e della liquidità e ai piani di remunerazione degli istituti finanziari. L'introduzione del RAF in Italia è avvenuta con il 15° aggiornamento della circolare 263/06 della Banca d'Italia[1] e a livello europeo con l'emanazione da parte del Financial Stability Board (FSB)[2]. Esso altro non è che un documento strategico che ne identifica il processo di gestione del rischio, permettendo la creazione di

[1] "Nuove Disposizioni di Vigilanza Prudenzia le per le Banche" (Titolo V, (Titolo V, capitolo 7-"Il Sistema dei Controlli Interni"), emanato in data 2 Luglio 2013

[2] "Thematic Review on Risk Governance" del 12 Febbraio 2013 e "Principles for an effective Risk Appetite Framework" in del 18 Novembre 2013

una situazione di trasparenza e di coerenza tra i rischi accettati e gli obiettivi che s'intendono perseguire. Ciò, raccordandosi con gli altri processi esistenti (ICAAP, ILAAP, Capital Allocation, Strategic Plan, Recovery Plan e Remuneration Framework). Scopo dei rischi inclusi nel RAF dovrebbe essere la loro comprensibilità.

Figura 1: Fasi Risk Appetite Framework

Rispetto a documenti come lo Strategic Plan, il Risk Appetite è incentrato sui risk limits e policy mentre il secondo sarà incentrato sugli obiettivi di performance. In conformità con i principi del Financial Stability Board[3], l'istituzione di un RAF efficace è uno strumento strategico per rafforzare una forte cultura del rischio negli istituti finanziari, a sua volta fondamentale per un sound risk management. L'evoluzione normativa in materia di RAF ha spinto gli intermediari a rivedere ed aggiornare i processi aziendali così come da richiesta esplicita del regulator. Lapproccio ad oggi implementato è il Top-Down approach.

Figura 2: Top-Down Approach

Fonte: Ernst & Young "Risk Appetite Framework (RAF) - Basilea 3: risks and supervision 2014 " – Materiali Convegno Giugno 2014

Importanti sono poi i meccanismi di collaborazione tra il Chief Financial Officer e Chief Risk Officer in ottica RAF. In particolare, durante la fase di approvazione della struttura del risk indicator framework, il board fissa ex-ante gli obiettivi in termini d'indicatori come, ad esempio regulatory capital ratio. Tale fase avvia poi quella di pianificazione strategica ed operativa che sosterrà lo sviluppo del financial statement a livello patrimoniale e reddituale. Per il CFO porterà alla determinazione del piano industriale mentre per il CRO sarà utile per prendere visione delle ipotesi di proiezione degli aggregati del financial statement fornendo, allo stesso tempo, le proxy di rischio per andare poi a quantificare le misure di rischio incluse nel risk indicator framework[4], che si suddividono tra primari, complementari ed operativi. Da ultimo il CRO deve verificare che sia sempre rispettata l'adeguatezza patrimoniale oltre ad una sostenibilità del RAF stesso. Durante la fase di monitoraggio del Risk Appetite di breve e di lungo periodo si osservano flussi informativi – almeno su base trimestrale – relativi agli esiti delle verifiche funzionali al monitoraggio del RAF. Questi hanno ad oggetto indicatori come PdV, MINT, MOL per andare a calcolare gli assorbimenti di capitale oltre ad un monitoraggio dei livelli di risk appetite, risk tolerance, risk limits/early warnings.

4. Relazione Mifid II e RAF: un quadro integrato per la gestione del rischio lungo tutta la filiera cliente - intermediario

Certamente, ad una prima vista, i due approcci – Mifid da un lato e RAF dall'altro – servono scopi diversi: da un lato gli intermediari – banche in testa – e dall'altro gli investitori retail in massima parte. Ad ogni modo, ad un'analisi più attenta tali approcci condividono non solo alcuni concetti di fondo – gestione del rischio connesso ad obiettivi definiti – ma possiamo osservarne il fatto che un miglioramento della prima permette una miglior determinazione della risk-aversion oltre a poter meglio gestire i rischi dell'intermediario alla luce del balance sheet risk che può manifestarsi in particolari situazioni di stress del mercato finanziario che conducano a withdrawals importanti. A tal proposito verrà effettuata, non solo un'analisi comparativa di quanto già visto in ottica regolamentare ma si analizzeranno importanti questioni legate a: misure di rischio e correlation risk, assumptions lato risk

[3] Principles for an Effective Risk Appetite Framework, FSB, November 2013

[4] Dove nei primari abbiamo l'adeguatezza patrimoniale regolamentare (CET 1 Ratio, TIer 1 Ratio e Total Capital Ratio), liquidità (LCR e NSFR), leva finanziaria (Leverage Ratio), Performance Risk Adjusted (EVA, RAROC, RARORAC), ICAAP (Capital Adequacy Ratios). Nei complementari ritroviamo le diverse declinazioni di risk weighted assets a livello credito, market e controparte. Lato operativo è necessario guardare ai livelli di concentrazione del portafoglio lato geografico/rating/settori d'esposizione oltre a limiti VaR e limiti di perdite registrate per finire con la volatilità del NOPAT e la variazione del costo del capitale.

preferences/utilità attesa nell'intento di mostrare, a livello operativo, nell'ottica di servizio nell'ambito del private banking/wealth management. Tutto ciò, senza dimenticare come il miglioramento delle informazioni legate ai clienti vadano ad impattare positivamente in una dimensione che possiamo definire di servizio di wealth management, con tutto quello che consegue in termini di miglioramento del servizio e quindi di percezione del valore lato cliente.

4.1 Metodologie VaR: limiti, sfide e possibili risposte.

Un punto focale, considerando la qualità/quantità dei dati acquisibili dal questionario mifid, è il misalignment, in termini di risk aversion, tra il risultato ottenuto attraverso il questionario Mifid II ed il suo vero valore. Ciò espone inevitabilmente l'intermediario ad un balance sheet risk sino a comprometterne la propria stabilità finanziaria oltre ad una creazione di valore, in virtù di possibili withdrawals degli assets da parte dei clienti che possono accadere durante fasi di downturn economico-finanziario. Collegata a ciò, si rileva inoltre un aspetto relativo al vantaggio competitivo dell'intermediario stesso, identificabile in termini di valore del servizio di consulenza finanziaria che beneficerebbe molto di un allineamento della risk-aversion con gli obiettivi finanziari del cliente, e tenuto conto dei fattori di rischio da lui sostenuti, al fine di minimizzare bias comportamentali. Al fine di poter ottenere tale obiettivo è necessaria avere una maggiore conoscenza del cliente per poterne determinare la più adeguata funzione di utilità. Drivers di quest'ultima potranno poi essere sottoposti a stress test al fine di poterne analizzare gli eventuali impatti negativi. La conoscenza del cliente deve portare alla redazione di un financial statement corrente e previsionale, che incorpori gli obiettivi finanziari del cliente, ove quest'ultimi siano oggetto di adeguate analisi finanziarie. Accanto a ciò, si ritiene importante da un lato l'uso di modelli VaR, e non solo, che dimostrino una maggiore efficacia durante fasi complesse di mercato, e dall'altro, l'implementazione di una dashboard ragionata di misure risk-adjusted performance e di drawdown[5] che permettano di raggiungere i più elevati standard operativi in termini di market risk & wealth management. Sintetizzando quanto è possibile incontrare nell'ambito dell'offering attuale per i servizi di gestione di portafoglio per la clientela privata – private banking e wealth management – le metodologie di gestione del rischio utilizzate vedono l'uso di processi che, facendo perno sulla regolamentazione attuale, si affidano a metodologie d'identificazione del rischio di mercato che tendono a disattendere, in chiave ex-post, l'affidabilità promessa ex-ante soprattutto in presenza di fasi ribassiste aventi un impatto non trascurabile. Si fa riferimento a metodologie come quella della simulazione storica, eventualmente corretta attraverso aggiustamenti che conosciamo come age e weighted volatility, all'interno dell'insieme di tecniche note come EWMA[6]. Risultati simili si riscontrano con l'uso della metodologia parametrica, che, può prevedere una modalità di aggiustamento attraverso l'espansione di Cornish-Fisher[7]. In un'analisi dei pro e contro per l'investitore si rileva che: 1) La metodologia di simulazione storica – spesso effettuata con un frame giornaliero ed un periodo temporale di breve-medio periodo, mostra certamente una semplicità implementativa benché tenda a sottostimare il rischio nelle fasi di mercato rialzista (tail risk estremamente pronunciato) e riduca fortemente il budget risk – e quindi la possibilità di sfruttare in termini di rendimento potenziale futuro – non potendo prendere esposizioni in linea con i premi al rischio di una o più asset classes fin quando l'evento – market meltdown – non è uscito dal calcolo della media mobile. Nel caso della metodologia parametrica il tema è rappresentato dal ricorso all'ipotesi di normalità dei rendimenti. Tema a parte è l'utilizzo delle tecniche Monte-Carlo che permettono di poter eliminare ogni riferimento ma al tempo stesso richiedono maggiore complessità computazionale, laddove l'interesse è rivolto all'analisi dei risk factors[8]. Ciò premesso, le risposte a cui si giunge sono certamente nel senso di considerare una metodologia che cerca di superarne i limiti. Avendo a mente ciò è altresì interessante andare a considerare misure che siano rivolte al correlation risk come espressione poi delle misure VaR ed ES. Procedendo per gradi il primo aspetto è quello di ricorrere a tecniche appartenenti all'Extreme Value Theory. Elemento fondamentale della volatilità di portafoglio e VaR è certamente il correlation risk, le cui pairwise correlation devono essere considerate time-varying pena l'inaffidabilità dei modelli utilizzati. A tal fine è fondamentale utilizzare metriche che ci permettano di poter gestire in maniera efficace tale fonte di rischio per poter rispettare il mandato di rischio del cliente. Una possibile risposta a ciò è la Extreme Value Theory, che permette di determinare i livelli di rischio dell'investitore che siano decisamente più resilienti rispetto a situazioni negative di mercato. Ciò, in quanto una perdita di valore è generalmente molto costosa, sia per l'investitore che, potenzialmente, per l'intermediario che deve gestirne gli effetti, anche in termini di un balance sheet risk. Le peculiarità, che ne testimoniano una maggior resilienza rispetto ad un VaR storico o parametrico, sono rappresentate dalla loro struttura. Senza entrare troppo nei particolari è tuttavia opportuno dire quanto segue. Se l'attenzione deve essere posta maggiormente sui rendimenti negativi di un portafoglio/assets è cruciale identificare per il risk manager gli eventi estremi, che possiamo identificare in questo caso con cali del mercato azionario, ma non solo, di un'entità importante. A tal fine si devono assumere alcune distribuzioni di probabilità che sono differenti dalla normale, ampiamente utilizzata in finanza. Un approccio per la stima dei parametri è rappresentato dal teorema di Fisher-Tippett per il quale, l'aumento dimensionale del campione permette ai valori estremi una convergenza verso una distribuzione conosciuta come Generalized extreme value (GEV).

$$\boldsymbol{H_{\xi,\mu,\sigma}} = \begin{cases} \boldsymbol{exp}\left[-\left(\mathbf{1}+\boldsymbol{\xi}*\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}\right)^{-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\xi}}}\right] & \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{se} \\ \boldsymbol{exp}\left[-\boldsymbol{exp}\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}\right)\right] & \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \end{cases} \qquad \text{[Eq. 1]}$$

Dove x soddisfa la condizione $1+\frac{\xi(x-\mu)}{\sigma} > 0$. Questa distribuzione ha tre parametri:

μ: *location parameter, che misura la central tendency di* M_n

σ: *scale parameter, che misura la dispersione di* M_n

ξ: *tail index, che misura la shape della tail*

---

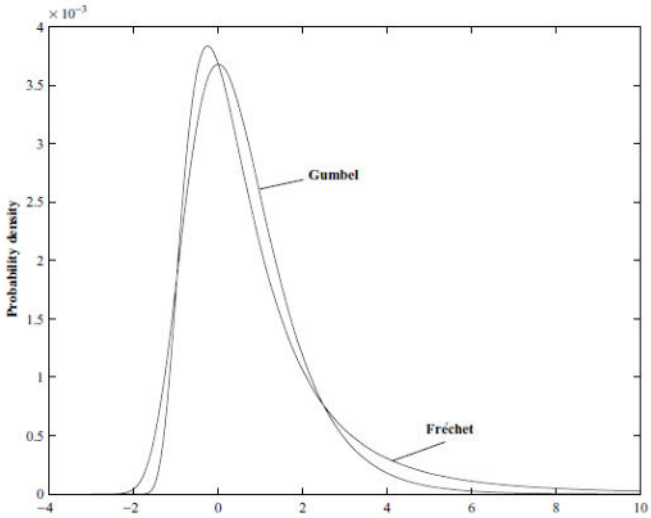
[5] Tali misure riguardano sia il modo d'intendere la performance del portafoglio in un'ottica money weighted return (MWR) che in termini di rendimento aggiustato per il rischio (RAP).

[6] Exponential Weighted Moving Average

[7] Ottiene un miglioramento della skewness e kurtoris

[8] Risk factors time-varying di cui interessa la struttura di correlazione nel tempo

Figura 3: Frechèt & Gumbel a confronto



Fonte: Gunter Meissner "Correlation Risk Modeling and Management" 2014 Wiley

Dei tre casi generali conosciuti[9] della GEV distribution, interessa analizzare il caso in cui:

- $\xi > 0$, la GEV diventa una Frechet distibution e le tails sono pesanti (heavy) come nel caso della t-distribution e pareto distribution
- $\xi = 0$, la GEV diventa una Gumblet distibution e le tails sono piccole (light) come nel caso della normal e lognormal distribution

Nei mercati finanziari esistono solo la prima e la seconda situazione descritta e quindi sono importanti le distribuzioni di Frechét e quella di Gumbel e le loro rispettive procedure di stima. In merito, tre sono le modalità base per effettuare tale scelta:

1) I ricercatori sono fiduciosi di una parent distribution
2) Il ricercatore applica una statistica test per non rigettare l'ipotesi $\xi = 0$. In questo modo il ricercatore usa l'assunzione che $\xi = 0$
3) Il ricercatore potrebbe desiderare essere conservativo ed assumere che $\xi < 0$ per evitare un model risk

Tabella 1: Declinazioni Generalised EVT VaR

FRECHÉT	GUMBEL
$\boldsymbol{\mu - \frac{\sigma_n}{\xi_n}\left[1 - (-n\, ln(p))^{-\xi_n}\right]}$ [Eq. 2]	$\boldsymbol{\mu_n - \sigma_n \ln\left[-n\ \ln(p)\right]}$ [Eq. 3]

Da notare che con una shape compresa tra 0,2 e 0,4 le tails spariscono più lentamente rispetto alla normale. In questo caso il delta normal approach ed il metodo della simulazione storica sottostimano il rischio mostrando code più grasse. Importante è la calibrazione dei modelli osservati, che possono essere stimati con più modalità[10]. Soluzione alternativa, sempre all'interno della letteratura EV, è la Peaks-Over-Threshold Approach (POT). Quest'ultima richiede pochi parametri rispetto a quelli richiesti per la EVT. Essa fornisce il modo naturale per modellizzare valori che sono più grandi o più piccoli del livello soglia. In questo modo, la POT corrisponde alla GEV theory. La POT inizia con il definire una variabile casuale X come perdita. Si definisce u come soglia per valori positivi e la distribuzione delle excess losses oltre la soglia u come:

$$\boldsymbol{F_u(x) = P[X - u \leq x | X > u] = \frac{F_u(x+u) - F_u(x)}{1 - F(u)}} \qquad \textbf{[Eq. 4]}$$

per x > 0. Ciò fornisce la probabilità che una perdita superi la soglia u al massimo fissata in x. La distribuzione di X stessa può essere trasformata nelle forme più comunamente utilizzate come la normale, log-normale, t, ecc.. Ad ogni modo, come u diventa grande, il teomena Gnedenko-Pickands-Balkema-deHaan (GPBdH) indica che la distribuzione $\boldsymbol{F_u(x)}$ converge ad una generalised Pareto distribution, data da:

$$\boldsymbol{G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left[\left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{\frac{1}{\xi}}\right] & \xi = 0 \\ 1 - \left[-\frac{\xi}{\beta}\right] & \xi = 0 \end{cases}} \qquad \text{[Eq.5]}$$

Generalized Pareto Distribution mostra una curva che va sotto la distribuzione normale prima della coda. Essa poi si muove sopra la distribuzione normale fino a che raggiunge la coda estrema. La Generalised Pareto Distribution poi fornisce un'approssimazione lineare della coda. Uno degli obiettivi di usare la POT è calcolare il VaR, da quale poter determinare l'Expected Shortfall, anche chiamato come Conditional VaR:

[9] $\xi < 0$, la Generalised EVT diventa una Weibull distibution e le tails sono ancor più piccole (lighter) rispetto alla normal distribution. Tale situazione in accade mai in finanza.

[10] Measuring Market Risk, 2th edition Kevin Dowd

$$VaR = \mu + \frac{\beta}{\xi}\left\{\frac{n}{N_u}[1-(p)]^{-\xi} - 1\right\} \quad [\mathbf{Eq.\,6}]$$

$$Expected\ Shortfall = \frac{VaR}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi u}{1-\xi} \quad [\mathbf{Eq.\,7}]$$

Interessante poi osservare un'applicazione della multivariata EVT, al fine di mostrare come i valori estremi possano essere interdipendenti.

4.2: Utilità attesa e schemi di preferenze di portafoglio alternativi nel wealth management

Tema centrale in una "client's perspective" è rappresentato innanzitutto dall'acquisizione delle informazioni in un ampio spettro da parte del cliente. Ciò permette di: poter implementare soluzioni d'investimento maggiormente aderenti alla reale determinazione della funzione d'utilità del cliente che permettano il raggiungimento dei suoi obiettivi finanziari (1), minimizzare il balance sheet risk dell'intermediario, riducendone più possibile i withdrawals dei clienti in contesti di meltdown finanziari ed in termini ampi anche un eventuale rischio reputazionale (2). Nella finanza classica, che risulta essere ad oggi pesantemente impiegata, si utilizza una tradizionale funzione d'utilità – chiamata power utility – dove la risk aversion è rappresentata dal solo parametro γ:

$$\boldsymbol{U = 2 - W^{(1-\gamma)}} \quad [\text{Eq. 8}]$$

dove W è la variazione di ricchezza in un singolo periodo 1 + r, r è il singolo periodo rendimento del portafoglio e γ è parametrizzato tra 1,5 e 12. Tale funzione soddisfa due elementi chiave: 1) più ricchezza è sempre preferita (derivata prima dell'utilità è sempre positiva) 2) il beneficio dell'extra ricchezza svanisce all'aumentare della ricchezza posseduta (derivata seconda dell'utilità è sempre negativa). Tale funzione è approssimata bene dall'approccio media-varianza per bassi livelli di risk aversion o distribuzioni di rendimenti normali. Ad ogni modo, nell'affermare che nessun investitore razionale – anche in presenza di una bassa risk aversion – è agnostico rispetto ad una moderata skew, la power utility function necessita di considerare ulteriori elementi. Prova ne è il fatto che durante la GCF dove molti clienti ed advisors avrebbero certamente preferito evitare di avere portafogli particolarmente esposti ad una skew negativa andando ad utilizzare soluzioni tattiche che avrebbero certamente minimizzato effetti negativi in termini di withdrawals e redditività. Negli anni, si è fatta strada la PT (Kahneman & Taversky 2004) che cerca di essere la risposta alla frase molto spesso detta dagli investitori "I don't like risk, but I live to win". Tale teoria prevede un processo in cui si massimizzi l'utilità attesa dell'investitore mentre si minimizzano gli effetti dell'estimation error. A livello pratico, essa prevede di utilizzare le reali preferenze degli investitori, considerandolo irrazionale. Ciò ci porta a considerare funzioni di utilità che incorporino ulteriori fattori. Versione "ultima" della funzione di utilità, che ci permette di poter analizzare la problematica, è la S – Shape Utility function che considera, ovviamente i parametri della kinked utility function[11], integrandoli. Risultato è l'aver tre "dimensioni" delle preferenze di rischio: γ: che misura la risk aversion λ: che misura la loss aversion, che si nota quando un investitore è decisamente più sensibile ad una perdita che ad un gain φ: che misura la reflection, che si ha quando gli investitori sono avversi al rischio solo quando si tratta di gain e cercano il rischio solo quando tratta di perdite. In formule:

$$\boldsymbol{U = \begin{cases} 2 - W^{(1-\gamma)} \ \ per\ r \geq 0 \\ 2 - \lambda W^{(1-\gamma)} \ \ per\ r < 0, \varphi = 0 \\ 2 - \lambda(2-W)^{(1-\gamma)} \ \ per\ r < 0,\ \varphi = 1 \end{cases}} \quad [\text{Eq. 9}]$$

Risultato: la derivata seconda non è più negativa per qualsiasi rendimento e la preferenza dei momenti sarà determinata da forze concorrenti della risk aversion, loss aversion e reflection. In termini di asset allocation, si passa da una modern portfolio theory dove gli input sono i rendimenti, le varianze e covarianze che attraverso un ottimizzatore con fissate regole di minimizzazione delle varianze attese e massimizzazione dei rendimenti attesi, ad una impostazione dove la massimizzazione dei rendimenti sono basati sull'utilità attesa. Quest'ultimi sono il risultato di un possibile risultato congiunto di tutti gli assets, ossia dei loro rendimenti[12]. Tale approccio non considera la creazione di una frontiera efficiente in virtù del fatto dell'evidenza dei tre parametri dell'utilità definiti dall'investitore che determinano un solo portafoglio appropriato. Misurare la risk preference dell'investitore vuol dire specificare il profilo della funzione di utilità in tre dimensioni precedentemente richiamate, calibrandole attraverso un questionario lottery-style (Holt & Laury, 2002). La determinazione della risk aversion, γ, così come per le altre è possibile stimarla attraverso l'utilizzo di un questionario. In questo caso vengono poste 5 domande all'investitore, con le quali sarà possibile determinarne anche la curvatura della power utility function.

Tabella 2: Questionario propensione al rischio del cliente per determinazione risk aversion

Domanda 1: tra le seguenti due opzioni, quali preferisci?

Scelta A: 50% di vincere 2€ ed il 50% di vincere 1,60€
Scelta B: 50% di vincere 3,85€ ed il 50% di vincere 0,10€

Domanda 2: tra le seguenti due opzioni, quali preferisci?

Scelta A: 60% di vincere 2€ ed il 40% di vincere 1,60€
Scelta B: 60% di vincere 3,85€ ed il 40% di vincere 0,10€

Domanda 3: tra le seguenti due opzioni, quali preferisci?

Scelta A: 70% di vincere 2€ ed il 30% di vincere 1,60€
Scelta B: 70% di vincere 3,85€ ed il 30% di vincere 0,10€

Domanda 4: tra le seguenti due opzioni, quali preferisci?

Scelta A: 80% di vincere 2€ ed il 20% di vincere 1,60€
Scelta B: 80% di vincere 3,85€ ed il 20% di vincere 0,10€

[11] Presenta lo stesso profilo della power utility quando i rendimenti sono positivi. Quando i rendimenti sono negativi l'utilità cade ad un ratio λ preferendo una skew positiva quando $\lambda > 1$.

[12] A livello iniziale è possibile utilizzare rendimenti storici, avente una frequenza mensile. "Modern Asset Allocation for Wealth Management"

Domanda 5: tra le seguenti due opzioni, quali preferisci?

Scelta A: 90% di vincere 2€ ed il 10% di vincere 1,60€
Scelta B: 90% di vincere 3,85€ ed il 10% di vincere 0,10€

La modalità con cui però è possibile assegnare ad un investitore una precisa risk aversion passano generalmente attraverso l'utilizzo di tecniche di self-assessment della risk tolerance, experience con rischio, etc. Dal punto di vista accademico della progettazione dei questionari, la capacità di un test di misurare la caratteristica prevista è nota come "validità" (Grable, 2017) che tuttavia rimane difficile da misurare. La determinazione della loss aversion, λ – che varia tra 1 (no loss aversion) a 3 (massima loss aversion), ci permette di determinare la curvatura della power function utility, avviene ricorrendo ad un questionario[13] costruito nella seguente modalità:

Tabella 3: Questionario propensione al rischio del cliente per determinazione loss averion

Domanda 1: viene lanciata una moneta equilibrata. Con testa perdi 3 € e con croce vinci 6 €

Scelta A: Accetti di giocare la lotteria
Scelta B: Rifiuti di giocare la lotteria

Domanda 2: viene lanciata una moneta equilibrata. Con testa perdi 4 € e con croce vinci 6 €

Scelta A: Accetti di giocare la lotteria
Scelta B: Rifiuti di giocare la lotteria

Domanda 3 viene lanciata una moneta equilibrata. Con testa perdi 5 € e con croce vinci 6 €

Scelta A: Accetti di giocare la lotteria
Scelta B: Rifiuti di giocare la lotteria

Domanda 4: viene lanciata una moneta equilibrata. Con testa perdi 6 € e con croce vinci 6 €

Scelta A: Accetti di giocare la lotteria
Scelta B: Rifiuti di giocare la lotteria

Dove rifiutare la prima domanda comporterà, dovendo necessariamente rifiutare le successive, di ottenere il valore più elevato della variabile. Diversamente, accettare tutte le domande comporterà un suo valore più contenuto.
Per quanto attiene poi la misurazione della reflection, φ, si sottolinea come tale variabile può assumere un valore binario tra 0 ed 1, contrariamente alla loss aversion e risk aversion. In questo caso, l'investitore viene posto davanti a due domande identiche, dove la piccola differenza è costituita dalla parola guadagno, presente nella prima domanda, e perdita, presente in quella successiva:

Tabella 4: Questionario propensione al rischio del cliente per determinazione reflection

Domanda 1: tra le seguenti due opzioni, quali preferisci?

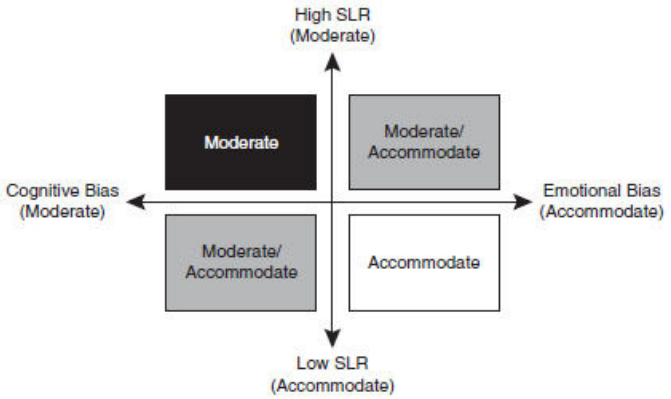
Scelta A: Sono certo di guadagnare 20 €
Scelta B: Ho 1/3 delle possibilità di poter guadagnare 60€

Domanda 2: tra le seguenti due opzioni, quali preferisci?

Scelta A: Sono certo di perdere 20 €
Scelta B: Ho 1/3 delle possibilità di poter perdere 60€

Nell'includere gli obiettivi finanziari dell'investitore, si applica l'idea del goal based wealth management che vuol dire effettuare un override moderato dei tre parametri della funzione di utilità. Al di là di moderare i behavioral bias come SLR aumenta, si raccomanda l'adozione di un framework che raccomandi agli advisor di essere meno disposti a compromessi rispetto agli emotional bias[14] e cognitive bias[15].

Figura 4: Standard Living of Risk & behavioral bias



Fonte: Modern Asset Allocation for Wealth Management

[13] Scelte possibili è tra il questionario multi-dimensionale qualitativo (Grable, Lytton 1999) o attraverso una soluzione che espliciti le preferenze individuali (Guillemette, Yao, James, 2015)
[14] Guidati da risposte nel questionario da risposte subconscie difficili da rettificare s
[15] Guidati da una mancanza d'informazione Esempi sono il self-control bias e l'endowent bias

L'elemento chiave è che quando sono presenti obiettivi finanziari, acquistare rischio dall'essere una preferenza personale diviene un lusso. Ciò è facilmente intuibile una volta che viene introdotta una misura di discretionary wealth relativa che chiamiamo SLR (Wilcox, Horvitz DiBartolomeo, 2006) formalmente rappresentata come:

$$\boldsymbol{SLR = 100\% - \frac{Discretionary\ Wealth}{Total\ Assets}} \qquad \text{[Eq. 10]}$$

dove il discretionary wealth è la differenza il totale attività ed il totale delle passività dell'investitore desumibile da un balance sheet model. Importante è l'interpretazione di tale valore. Innanzitutto, esso può essere negativo o positivo. In tal caso, prima di parlare di risk taking o no risk taking, è opportuno portarsi in area positiva attraverso modificazioni delle attività dell'investitore come allungamento del periodo temporale per ottenere l'obiettivo e/o riduzione del medesimo. Portato tale valore in territorio positivo, ci possiamo trovare nella situazione dove l'investitore mostra un basso livello di risk-taking nel caso di un basso livello di discretionary wealth ratio che inserito nella formula precedente ci restituisce un valore dell'SLR alto. Ovviamente, solo nel caso opposto si avrà un livello elevato di risk taking. Ciò sottolinea l'importanza della misura relativa di discretionary wealth al posto di un suo valore assoluto dove è importante però andare a determinare lato assets, il present value dell'employment capital less comsuption e lato liabitities, il present value del retirement capital.

Tabella 5: Balance Sheet Model dell'investitore

ATTIVITA'	PASSIVITA'
Liquidità **Portafoglio investito (securities)** Quota esposizione azionaria Quota esposizione obbligazionaria/credito Quota esposizione investimenti alternativi (private equity) **Attività immobiliari** Prima casa ed altri asset immobiliari Assets immobiliari **Valore attuale pensione pubblica** **Valore attuale Human Capital**	**Debiti fiscali a breve termine** **Debiti bancari a breve termine** **Mutuo per ristrutturazione immobiliare** **Valore attuale obiettivo tenore vita desiderato** **Equity o surplus capital**
Totale Attività	Totale Passività + Equity

DISCRETIONARY WEALTH
DISCRETIONARY WEALTH = ATTIVITA' - PASSIVITA' **SLR = 1 - (DISCRETIONARY WEALTH/TOTALE ATTIVITA')**

Asset immobiliari: investimenti effettuati direttamente sul comparto immobiliare (case ed altre proprietà)
Valore attuale pensione pubblica: ammontare totale del montante contributivo ottenuto attraverso attualizzazione della rendita pensionistica individuale
Valore attuale Human Capital: capacità dell'investitore di produrre reddito attraverso l'attività professionale. Si ottiene attraverso l'attualizzazione dei flussi di reddito attesi ad un tasso di attualizzazione "adjusted", ossia risk free rate + un premio per l'incertezza dello scenario ipotizzato.
Valore attuale "obiettivo tenore di vita desiderato": obiettivo finanziario determinato dal cliente rispetto ai propri desiderata. Tale valore rappresenta la liability da ottenere nel momento in cui il cliente andrà in pensione
Capital o surplus capital: differenza tra le attività e le passività.

In una rappresentazione delle tre dimensioni e degli obiettivi finanziari fissati, si specifica il profilo della funzione di utilità e sue "correzioni" rimanendo coerenti con la misura SLR e quindi di discretionary wealth ratio per definire la composizione dei diversi portafogli, che considererà il livello di VaR e Conditional VaR tollerabili.

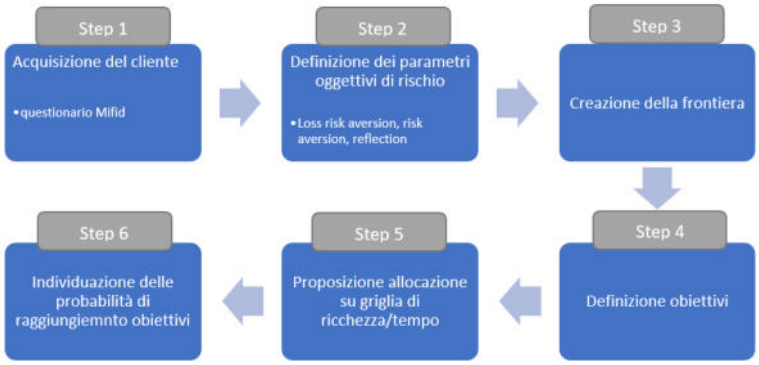
4.3 Dagli obiettivi ai rischi: Un caso pratico

La profilatura di un cliente è notevolmente influenzata non solo dalla ricchezza economica che possiede, ma sicuramente anche dagli obiettivi[16] reali che vuole raggiungere negli anni. Uno dei lavori del banker è quello di far conciliare questi due aspetti la cui causalità è ben chiara, ma può spingere a comportamenti irrazionali e reazioni incontrollate in fasi di mercato non favorevoli perdendo di vista la tutela del patrimonio. Definito il profilo di rischio del cliente è necessario successivamente focalizzarsi sugli obiettivi finanziari, ricordando che, erroneamente, si tende spesso a definire strategie di investimento non coinvolgendo gli obiettivi dell'investitore all'interno del processo di allocazione. Quanto proposto dalla teoria moderna del GBWM (Goal based wealth management) si occupa della definizione concreta di obiettivi a medio e lungo termine e successivamente della strategia di investimento utilizzata per raggiungerli. Introducendo un nuovo quadro di riferimento per la gestione patrimoniale basata sugli obiettivi, coerente con la modern portfolio theory oltre che con gli sviluppi della finanza comportamentale, il rischio è inteso come probabilità di non raggiungere i propri obiettivi, e non solo come la deviazione standard dei portafogli degli investitori. A tal scopo risulta essere utile l'approccio suggerito in cui, derivato il profilo di rischio, si instaura un dialogo continuativo con il cliente definendone i suoi obiettivi, l'orizzonte temporale, i possibili costi $c_k(t)$ distribuiti lungo il periodo di investimento per raggiungerli e dell'importanza attribuita (cioè

[16] Nella trattazione il concetto di "obiettivi" è riferito a beni materiali/immateriali che l'investitore è interessato ad acquisire nel corso del tempo. Gli obiettivi saranno associati al processo di investimento idoneo per ottenerli.

"l'utilità[17]") che ognuno di questi ha per l'investitore. A riguardo è fondamentale il paper di Markowitz (1952) nella definizione della nozione di "frontiera efficiente" come l'insieme dei migliori portafogli possibili che rappresentano il compromesso ottimale tra rischio e rendimento. Rimanere sulla frontiera efficiente riduce al minimo anche il rischio GBWM poiché, per un livello fissato di volatilità, desideriamo il rendimento atteso ottimale per raggiungere gli obiettivi. Pertanto, idealmente, consideriamo solo i portafogli sulla frontiera efficiente, sebbene l'algoritmo funzioni altrettanto efficacemente se siamo limitati a un insieme di portafogli che non si trovano sulla frontiera. Il risultato di Markowitz per quanto riguarda le allocazioni ottimali del portafoglio è stato esteso e volto a massimizzare l'utilità della ricchezza patrimoniale dell'investitore W (Merton (1969); Merton (1971)). L'ostacolo principale all'attuazione pratica di questo approccio è la determinazione di una funzione di utilità, che è specifica dell'investitore. La funzione di utilità dell'investitore può essere in contrasto con la tradizionale teoria della funzione di utilità, come mostrato, nella Prospect Theory (Kahneman e Tversky (1979)) al pari della practices da seguire per incorporare in modo appropriato le considerazioni comportamentali nell'ottimizzazione. Per fare ciò, creiamo inizialmente un'approssimazione potenzialmente molto grossolana per l'utilità (preferenza) assegnata a ciascun obiettivo. L'algoritmo ottimizza il valore atteso della somma delle utilità derivanti dagli obiettivi raggiunti e, attraverso una strategia di ottimizzazione, calcola le probabilità corrispondenti di raggiungere ciascun obiettivo. L'output dell'algoritmo è una tabella che raccorda obiettivi con le probabilità ottimizzate di raggiungimento per ognuno di essi. Il fatto che il risultato sia espresso in termini di probabilità, anziché di utilità attesa, è la chiave per comunicare in modo efficace con gli investitori. La ricerca comportamentale mostra che gli investitori comprendono meglio il concetto di probabilità di raggiungere un obiettivo rispetto alla maggior parte dei termini finanziari comunemente utilizzati dai gestori patrimoniali. Gli investitori sono in difficoltà nel comprendere il significato diretto di un'associazione obiettivo/utilità: non risulta intuitivo. È molto complesso far associare ad un investitore il suo livello di priorità di un obiettivo ad un valore quantificabile, rappresentato dall'utilità. Lo scopo della trattazione è quello di dialogare con l'investitore, trasformando le diverse assegnazioni di utilità ai vari obiettivi in corrispondenti livelli probabilità di raggiungerli. Più specificamente, se l'investitore ritiene di voler aumentare la probabilità di raggiungere uno specifico obiettivo lo farà con la consapevolezza che abbasserà la probabilità di raggiungere la maggior parte degli altri obiettivi. Se desiderano aumentare la probabilità di raggiungere tutti i loro obiettivi, possono decidere di aggiungere capitali ai loro investimenti (*injection*, I_i) in qualsiasi periodo di tempo specifico o insieme di periodi di tempo, oppure possono espandere la gamma di strategie di portafoglio di investimento a loro disposizione. L'investitore può quindi utilizzare l'algoritmo per ricalcolare rapidamente le nuove probabilità ottimizzate per il raggiungimento di ogni obiettivo. Questa procedura può essere ripetuta quante volte si desidera. Questo processo di loop ci consente di determinare direttamente le vere preferenze dell'investitore tra i propri obiettivi, invece di indovinarli o presumerli. Questo approccio fornisce la corretta estensione per comprendere il rischio GBWM nel contesto di molteplici obiettivi concorrenti. Non è più una probabilità unica. Ora è una raccolta di probabilità che competono tra loro, e questo rischio complessivo è minimizzato dalla completa soddisfazione del maggior numero possibile di obiettivi dell'investitore, ponderati in base alla loro importanza per l'investitore. Notiamo che poiché utilizziamo la programmazione dinamica (un processo *backward*), la natura di ciascun obiettivo non può dipendere dalla realizzazione di obiettivi precedenti, perché, in questo caso, si tratterebbe di un fenomeno *forward* che va avanti nel tempo. Ciò costituisce la limitazione più rilevante del metodo in questo articolo. Ad esempio, se un investitore ha l'obiettivo di acquistare un'auto in un dato momento, possono acquistare l'auto più bella che hanno considerato (obiettivo completo) oppure auto meno belle (obiettivi parziali) o non acquistare l'auto. Ma se dovessero decidere di non acquistare l'auto, non possono spostare l'obiettivo dell'auto a un anno successivo con il metodo descritto in questo documento. Riassumiamo il processo di creazione del profilo di rischio fino alla gestione degli obiettivi con questo diagramma:

Figura 5: Diagramma di processo wealth management



All'interno dello step 5 "Proposizione allocazione su griglia Ricchezza/tempo", individueremo due tipi di soluzioni: una soluzione "dinamica" (GWBM) in relazione all'evoluzione del tempo e della ricchezza ottenuta ed una soluzione "statica", proposta dalla frontiera EGBW dove i portafogli suggeriti verranno mantenuti lungo l'arco temporale dell'investimento; entrambe le soluzioni, aventi gli stessi input, individueranno la probabilità di raggiungimento degli obiettivi indicati.

4.3.1 GWBM: pilastri e risultati dell'ottimizzazione dinamica degli obiettivi

L'algoritmo offre una soluzione "dinamica" al problema di massimizzazione delle probabilità di raggiungimento degli obiettivi: determinando ex-ante il plateau di portafogli su cui il cliente può investire[18], ad ogni condizione di mercato che affronteremo, il calcolo

[17] Non importa capire come definire l'utilità di un obiettivo. Importante è capire come questa utilità sia un numero che indichi la priorità di un obiettivo e la sua importanza relativamente ad altri. Nella trattazione completa infatti è possibile non solo individuare degli obiettivi "All or nothing", cioè singoli in diversi istanti temporali, ma anche di obiettivi "Partial goals" in cui per un istante temporale il cliente può essere chiamato a decidere quale spesa sostenere in base alla ricchezza del momento."

[18] Nel proseguo della trattazione si tornerà sulla definizione dei portafogli ammissibili per il cliente data la sua rischiosità.

ci offrirà su quale portafoglio dovrà investire l'investitore. Per semplicità, qualora avessimo ad esempio un solo obiettivo G da raggiungere al tempo T stiamo cercando:

$$\max_{\{A(0),A(1)\ldots A(T-1)\}} Pr(W(T) > G) \qquad \text{[Eq. 11]}$$

di massimizzare la probabilità, attraverso la proposizione di una serie di allocazioni nel tempo $(A(0), A(1)..A(T-1))$, che permetteranno alla scadenza T di avere la ricchezza disponibile W(T) per porter soddisfare l'obiettivo prefissato.
Per risolvere questo problema con la programmazione dinamica dobbiamo impostarne gli input e lo faremo svolgendo un caso pratico per facilitarne la comprensione.

- *Orizzonte temporale di investimento*

Consideriamo periodi di tempo $t = 0,1,\ldots,T$ con un intervallo di h anni tra loro. Quindi se h = 0,25, allora $t = 4$ corrisponde a un anno da oggi, $t = 0$. Il periodo di tempo finale, $t = T$ per il portafoglio può corrispondere o meno alla data di fine investimento prevista per l'investitore.

- *Definire gli obiettivi dell'investimento*

Più recentemente, il settore Wealth Management ha sostenuto l'uso di una gestione patrimoniale basata sugli obiettivi (GBWM), dove gli investitori scelgono i portafogli di investimento sulla frontiera efficiente di Markowitz con l'obiettivo di massimizzare la probabilità di raggiungere i propri obiettivi finanziari piuttosto che massimizzare l'utilità o ottimizzare direttamente il proprio trade-off tra volatilità e rendimento atteso. Una vasta letteratura ha incorporato ed esteso l'ottimizzazione efficiente del portafoglio in base alla media-varianza, sia in contesti statici che dinamici, ed è ampiamente utilizzata nella pianificazione pensionistica. Nonostante questo, siamo soliti considerare la sola volatilità del rendimento del portafoglio come unica misura di "rischio" e non la possibilità che un investitore non raggiunga i propri obiettivi; sicuramente diminuendo la volatilità può aumentare la possibilità che l'investitore non raggiunga i propri obiettivi. Proprio quando la ricchezza nel portafoglio è insufficiente per raggiungere tutti gli obiettivi, tuttavia, l'investitore avrà bisogno di un modo per (ri)ponderare i propri obiettivi per istruire l'algoritmo su quali obiettivi dare priorità massimizzando l'utilità attesa funzione di quanti sono stati raggiunti nel tempo. Attenzione però che in questa accezione, l'utilità è un numero soggettivo come la priorità che l'investitore esprime. All'interno dell'esempio, ci siederemo davanti ad un investitore il cui problema economico riguarda il raggiungimento di due tra i più comuni obiettivi: l'acquisto di un'autovettura tra 5 anni e il pagamento dell'iscrizione universitaria dei propri figli tra 10 anni. Arricchiamo l'esempio supponendo che per i due obiettivi esista una "seconda scelta", chiamata "obiettivo parziale", su cui l'algoritmo ripiegherà qualora si presentasse la necessità che, al tempo in cui esiste l'esborso, non si disponga della liquidità necessaria per ottenere quello ritenuto principale o che questi obiettivi non portino ad una soluzione ottimale in termine di utilità. Esprimiamo gli obiettivi[19] in questa tabella mettendo in ordine per tempo (crescente) per tempo e per costo(crescente):

Tabella 6: Costi ed utilità degli obiettivi dell'investitore

Tempo	*5*		*5*		*10*		*10*	
Costo	$c_{1,5}$	120.000,00 €	$c_{2,5}$	130.000,00 €	$c_{1,10}$	160.000,00 €	$c_{2,10}$	180.000,00 €
Utilità	$u_{1,5}$	1.000	$u_{2,5}$	3.000	$u_{1,10}$	5.000	$u_{2,10}$	10.000

Verranno richiamati nella trattazione gli elementi della tabella con la dicitura $c_{k,t}$ dove il pedice t si riferisce al tempo in cui insiste il costo e con k alla tipologia del costo stesso. Ad esempio, al tempo (t=5) si notano due costi per un unico obiettivo (acquisto di una autovettura di diverso valore):

- Per l'acquisto dell'autovettura si rappresentano due costi $c_{1,5} = 120.000$ € (quella meno performante), $c_{2,5} = 130.000$ € (quella più performate). Il pedice k=1 si riferisce al primo e unico obiettivo (acquisto autovettura) al tempo 5.
- Per il pagamento dell'iscrizione ad una prestigiosa Università americana invece i costi $c_{1,10} = 160.000$ € e $c_{2,10} = 180.000$ €.

Utilizzeremo la stessa nomenclatura relativamente ai due pedici (k obiettivo e t tempo) per esprimere l'utilità ($u_{k,t}$).
Per un istante temporale t definiremo con $K_{max}(t)$ il numero massimo di costi sostenibili nell'istante temporale di riferimento (ad esempio, per il tempo 5 si ottiene $K_{max}(5) = 2$).
Abbiamo altresì preso in considerazione il parametro inflazione (posizionata mediamente al 2%) che impatterà la spesa/costo prevista negli anni.

- *Portfolio Evolution and Portfolio Investment Strategies*

Definito un orizzonte temporale di investimento, verrà proposta un'allocazione ottimale posizionata nella frontiera al fine di poter massimizzare sia il valore atteso dell'utilità dell'investitore che altresì la probabilità di raggiungere gli obiettivi scelti in funzione del livello di ricchezza raggiunto nel tempo di osservazione.

[19] In questo caso si è scelto di creare appositamente un problema sfruttando due obiettivi tra i più comuni che si possono affrontare nella vita. Naturalmente l'algoritmo è versatile per n obiettivi in tempi distinti: questo presuppone logicamente avere a disposizione una macchina abbastanza performante per raggiungere la soluzione del problema in tempi rapidi. Questo problema che viene presentato ha ottenuto la sua soluzione in 3 secondi (processore Core i5).

In altre parole, ad ogni istante temporale, si guarderà al livello di ricchezza raggiunto e si sceglierà un'allocazione consona tra quelle proposte, che possa massimizzare la probabilità di raggiungere gli obiettivi. L'interazione con l'investitore parte proprio dalla prima fase, cioè quella di definizione degli obiettivi da raggiungere posizionati nell'arco temporale dell'investimento. Il dialogo sarà favorito nella misura in cui l'oggetto del discorso non saranno solo misure di rischio a sé stanti, ma verranno incorporate all'interno del processo di massimizzazione delle probabilità di raggiungimento di obiettivi economici reali. Non di rado si ravvisa la necessità di trasformare discorsi complicati (risk based) in misure di probabilità comprensibili a tutti. Ma andiamo con ordine.
In questa trattazione si semplifica e si restringe il subset delle asset classes disponibili per l'investitore non sottovalutando assolutamente tutto il processo di investimento e di proposizione del portafoglio (e di gestione): questa fase però è subordinata alla conoscenza del grado di "avversione" al rischio dell'investitore derivante dal questionario. Rispetto a quanto previsto dalla letteratura, partendo dalle risposte del questionario qualitativo proposto nei capitoli precedenti, si è proceduto alla mappatura dei parametri di avversione al rischio del cliente, di loss aversion e di risk tolerance derivanti dalla definizione della "Power Utility" ritenendola più idonea a descrivere la percezione al rischio degli investitori. Accostando i rendimenti storici della asset classes (R) alla funzione di utilità scelta ($\boldsymbol{U}_{(\gamma,\lambda,\varphi)}$) per ogni combinazione di $risk\ aversion\ \gamma, loss\ aversion\ \lambda, reflection\ \varphi$, si ottengono i vettori di allocazione **w*** secondo l'equazione:

$$\boldsymbol{w}^* = \boldsymbol{max}\ \boldsymbol{E}[\boldsymbol{U}_{(\gamma,\lambda,\varphi)}(\boldsymbol{R})] \qquad \text{[Eq.11]}$$

Dove **w*** risultano essere i pesi allocabili nelle asset classes rischiose (equity) rispetto a quelle meno rischiose (governativi, liquidità). Si riporta in tabella (Tabella 2: Questionario propensione al rischio del clientei risultati ottenuti.

Tabella 7: Portafoglio che ottimizza l'utilità dell'investitore dati i parametri($\boldsymbol{risk\ aversion\ \gamma, loss\ aversion\ \lambda, reflection\ \varphi}$)

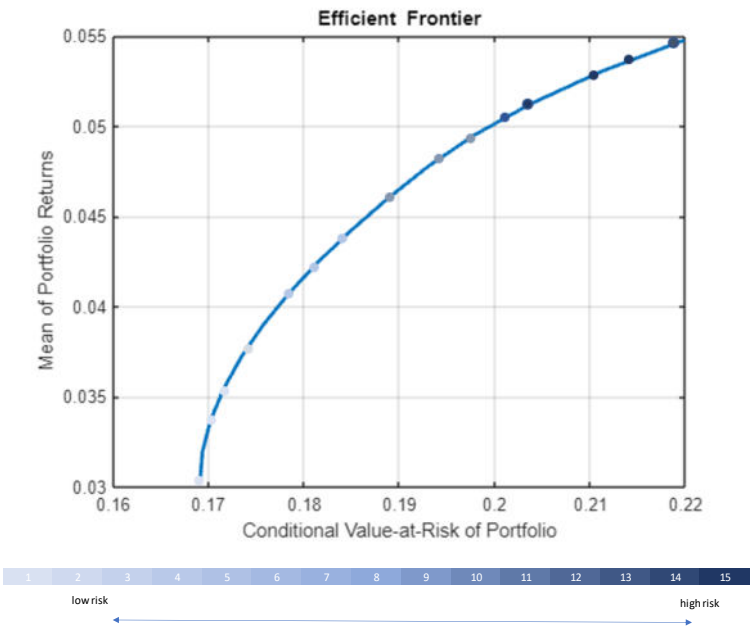
Reflection φ=0

Loss aversion mapping		*Asset class*	Risk aversion mapping			
			γ=3	**γ=6**	**γ=9**	**γ=12**
	λ=1	**Equity World**	54,3%	42,7%	36,9%	33,4%
		Equity Emu	45,7%	42,3%	40,4%	39,5%
		Global Gov. (1-5y)	0,0%	15,0%	22,8%	27,1%
		Liq.	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
			γ=3	**γ=6**	**γ=9**	**γ=12**
	λ=2	**Equity World**	47,4%	34,8%	35,3%	32,0%
		Equity Emu	43,1%	36,5%	39,9%	38,4%
		Global Gov. (1-5y)	9,3%	21,6%	24,1%	27,4%
		Liq.	0,2%	7,2%	0,7%	2,2%
			γ=3	**γ=6**	**γ=9**	**γ=12**
	λ=3	**Equity World**	41,4%	33,5%	31,4%	31,8%
		Equity Emu	40,4%	36,6%	35,9%	38,3%
		Global Gov. (1-5y)	16,9%	22,1%	25,1%	27,6%
		Liq.	1,3%	7,8%	7,7%	2,3%

Questa tabella descrive la molteplicità degli investitori aventi un profilo di rischio che viene descritto dai parametri $risk\ aversion\ \gamma, loss\ aversion\ \lambda, reflection\ \varphi$. Si suppone quindi che, una volta svolto il questionario (Tabella 2: Questionario propensione al rischio del cliente l'investitore sia stato classificato con parametri ($\gamma = 6, \lambda = 1, \varphi = 0$): l'investitore in oggetto, idealmente, può supportare un buon grado di rischio sul portafoglio, avendo un orizzonte di investimento medio lungo termine (gli obiettivi sono a 10 anni) e con una buona capacità di gestire gli eventi negativi del mercato (loss aversion minima) avendo però attenzione al rischio complessivo dell'investimento (risk aversion media, pari a 6). La ponderazione di portafoglio che ne massimizza l'utilità, dato il suo profilo di rischio, è una combinazione tra Equity (circa 85%) e i titoli governativi di breve-medio termine 15%. Questo portafoglio "risk profile" descrive alla perfezione il massimo grado di rischio che il cliente può sostenere in base alla sua profilatura: a parità di input nessun altro portafoglio con rischiosità maggiore può essere associato a questo profilo di rischio.
Individuato il portafoglio "risk profile" dell'investitore, è necessario individuare l'insieme di portafogli ammissibili per il cliente (il suo basket di portafogli) che saranno scelti in base alla ricchezza raggiunta e alla massimizzazione dell'utilità (e della probabilità di ottenimento degli obiettivi). Viene per prima cosa associata una metrica che descriva quantitativamente il concetto di "rischio" per il portafoglio "risk profile" così da individuare un insieme di portafogli ammissibile per l'investitore.
L'obiettivo è quello di proporre dei portafogli con un dato livello di *downside risk* coerente con la rischiosità ottenuta in sede di compilazione di questionario. Questa nuova frontiera avrà come input i parametri di descrizione qualitativa del rischio (risk aversion, loss aversion e reflection) e come output una serie di portafogli il cui Conditional Value at Risk[20], CvaR, massimo (fatto sul 5% della coda sx) è quello indicato dall'ultimo portafoglio sulla frontiera disegnato in blu scuro utilizzando i parametri sopra elencati. Ogni portafoglio sulla frontiera rappresenta il portafoglio che massimizza il rendimento minimizzando la rischiosità che il cliente dovrà gestire qualora allocasse su un portafoglio all'interno della frontiera[21]. Su questa frontiera scegliamo allora i 15 portafogli utili per il proseguo dell'esercizio, dal più rischioso (blu scuro) al meno rischioso (blu chiaro).

[20] La coda della distribuzione, in ottica di CVaR, è stata modellizzata secondo una Frechet utilizzando l'evidenza empirica dei periodi di stress posizionando il parametro shape equity $\xi = 0.3$.
[21] Per l'ottenimento della frontiera efficiente abbiamo utilizzato il software MatLab "Optimization Toolbox version 9.1 (R2021a)".

Figura 6: Frontiera Efficiente Conditional VaR



- *La ricchezza*

Elemento di estrema importanza per la soluzione al problema GBWM con obiettivi multipli è la definizione della ricchezza in ogni istante futuro dell'orizzonte di investimento. In questa trattazione possiamo interpretare la "ricchezza" come il valore attuale del portafoglio investito nel periodo di tempo considerato. Poiché ovviamente la ricchezza non è "statica" definiamo una scala di valori che contenga i_{max} valori di ricchezza dove i_{max} può essere qualsiasi numero desiderato (anche se si suggeriscono valori non troppo bassi perché possono causare imprecisioni e né valori troppo grandi o inutilmente lenti per lo svolgimento del problema). I valori della ricchezza i_{max} saranno definiti i limiti di ricchezza W_{min} e W_{max}. Iniziamo approssimando W_{min} e W_{max} annotandoli come valori di ricchezza minimo/massimo ragionevolmente raggiungibili per un investitore. Poiché abbiamo scelto di utilizzare il moto browniano geometrico per l'evoluzione del portafoglio modello in questo articolo, definiamo la dinamica della ricchezza nel tempo partendo dall' iniziale W(0) che evolverà come:

$$\boldsymbol{W(\mathrm{t}) = W(0) * exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t}Z\right]} \qquad \text{[Eq.13]}$$

dove Z, in questo caso, è una variabile casuale normale standard e $\boldsymbol{\mu}$ è il rendimento atteso della ricchezza.

Per definire i limiti W_{min} e W_{max} occorre considerare anche i costi $c_k(t)$ e le entrate $I(t)$ previsti per ogni istante futuro (t) al per il raggiungimento degli obiettivi[22]. Otteniamo allora:

$$\boldsymbol{\overline{W_{min}} = min_{t\epsilon(0,1,2,\ldots,T)}\left[W(0)e^{\left(\mu_{min}-\frac{\sigma^2_{max}}{2}\right)t-3\sigma_{max}\sqrt{t}} + \sum_{\tau=0}^{t}\left(I(\tau) - c_{k_{max}(\tau)}(\tau)\right)e^{\left(\mu_{min}-\frac{\sigma^2_{max}}{2}\right)t-3\sigma_{max}\sqrt{t}}\right]} \qquad \text{[Eq. 14]}$$

$$\boldsymbol{\overline{W_{max}} = max_{t\epsilon(0,1,2,\ldots,T)}\left[W(0)e^{\left(\mu_{min}-\frac{\sigma^2_{max}}{2}\right)t-3\sigma_{max}\sqrt{t}} + \sum_{\tau=0}^{t}\left(I(\tau) - c_{k_{max}(\tau)}(\tau)\right)e^{\left(\mu_{min}-\frac{\sigma^2_{max}}{2}\right)t-3\sigma_{max}\sqrt{t}}\right]} \qquad \text{[Eq. 15]}$$

Dove i valori μ_{min} e σ^2_{max} sono rappresentativi dei valori rendimento/rischio ottenuti dai portafogli individuati all'interno della frontiera di cui al precedente paragrafo.
Possiamo a questo punto stimare la scala della ricchezza equi distanziando, su base logaritmica, i livelli ottenuti. Ottenendo alla fine un insieme di valori possibili:
Definiamo in ultimo la scala della ricchezza equi distanziando su base logaritmica i livelli ottenuti. Ottenendo alla fine una scala di valori possibili: $W_{min} < W_0 < W_{max}$
A questo punto, per risolvere il problema dinamico, abbiamo bisogno di costruire le probabilità condizionate corrispondenti ad ogni livello di ricchezza: per ogni istante temporale la probabilità condizionata di trovarsi nello stato di ricchezza $W_j(t+1)$ proveniendo da $W_i(t)$ assumendo, se esistono, i costi $c_k(t)$ e le entrate $I(t)$ attribuibili al tempo t per il raggiungimento degli obiettivi sarà data da:

$$\boldsymbol{\bar{q}\left(W_j(t+1)\middle|W_i(t), c_k(t), \mu_l\right) = \phi\left(\frac{1}{\sigma_l\sqrt{h}}\left(ln\left(\frac{W_j(t+1)}{W_i(t)+I(t)-c_k(t)}\right) - \left(\mu_l - \frac{\sigma_l^2}{2}\right)h\right)\right)} \qquad \text{[Eq. 16]}$$

La probabilità condizionata è stimata assumendo $\phi(z)$ il valore della funzione di densità di probabilità della variabile normale standard z. Sarà una funzione delle variabili sopra citate e del portafoglio di frontiera scelto da cui si deriveranno il rendimento atteso e la

[22] All'interno dell'esempio riportato non risulta alcun inflow. Verrà solo ipotizzato un inflow periodico alla fine della trattazione.

deviazione standard. Si otterrà una matrice $i_{max} x\ i_{max}$ in cui ogni riga riporterà le probabilità condizionate $\left(W_j(t+1)\middle|W_i(t), c_k(t), \mu_l\right)$ che, comunque, occorrerà normalizzarle per poter ottenerne la somma 1.

$$\bar{q}\left(\boldsymbol{W_j(t+1)}\middle|\boldsymbol{W_i(t), c_k(t), \mu_l}\right) = \frac{\bar{q}\left(\boldsymbol{W_j(t+1)}\middle|\boldsymbol{W_i(t), c_k(t), \mu_l}\right)}{\sum_{J=1}^{Imax} \bar{q}\left(\boldsymbol{W_j(t+1)}\middle|\boldsymbol{W_i(t), c_k(t), \mu_l}\right)} \qquad \text{[Eq. 17]}$$

Introduciamo, in ultimo che all'interno della trattazione simuleremo che l'investitore abbia un investimento iniziale pari a $W_0 = 100.000\ Euro$.

4.3.2 Il problema dinamico

Possiamo tornare al problema di massimizzazione della probabilità di raggiungimento degli obiettivi. Dati i livelli di ricchezza simulati, l'orizzonte di investimento, i costi e le utilità attribuite agli obiettivi e i portafogli selezionati sulla frontiera, introduciamo la funzione "valore" che è funzione della ricchezza (e quindi dell'utilità) dell'investitore. Attraverso un processo di stima "backward" è possibile sfruttare l'equazione proposta da Bellman al fine di definire quali obiettivi è possibile raggiungere, quali eventualmente sostituire e quali risultano impossibili raggiungere. La funzione valore V, al tempo t + 1 è la somma attesa più alta possibile delle utilità da obiettivi raggiunti nei periodi $t+1, t+2..T-1$ più l'utilità dell'eccesso di ricchezza che otteniamo in t = T. Il termine "più alto possibile" significa che in ogni momento e punto della griglia della ricchezza, verrà stimata la funzione valore prendendo in considerazione le componenti di costo/utilità $\boldsymbol{c_{k,t}}$ *e* $\boldsymbol{u_{k,t}}$ e tutti i possibili portafogli di investimento previsti *l*[23]. Il processo si definisce "backward" perché se l'obiettivo è determinare ogni valore della funzione valore V per ogni istante temporale e per ogni livello di griglia di ricchezza, partiamo dal periodo finale T, dove sappiamo con certezza che

$$\boldsymbol{V(W_i(T)) = U(W_i(T))} \qquad \text{[Eq. 18]}$$

Nel nostro esempio, sappiamo che al tempo T,

$$\boldsymbol{V\left(W_i(T)\right)} = \begin{cases} \boldsymbol{U\left(W_i(T)\right) = 10.000\ se\ \ W_i(T) \geq 180.000} \\ \boldsymbol{U\left(W_i(T)\right) = 5.000\ \ se\ \ 160.000 \leq W_i(T) < 180.000} \end{cases} \qquad \text{[Eq. 19]}$$

Se non otteniamo una ricchezza al tempo T maggiore di Euro 160.000, posizioniamo l'utilità $U\left(W_i(T)\right) = 0$
Poiché conosciamo le probabilità di transizione stimiamo la seguente equazione di Bellman per il problema dinamico e risolviamola per ciascun istante temporale, livello di costo e portafoglio scelto.

$$\boldsymbol{V(W_i(t)) = \max_{k,l}\left[u_k(t) + \sum_{J=1}^{imax} V(W_j(t+1)) * q(W_j(t+1)|W_i(t), c_k(t), \mu_l)\right]} \qquad \text{[Eq. 20]}$$

Il processo di ottimizzazione dinamica dei due obiettivi produrrà una matrice dove nell'asse delle ordinate ci saranno i livelli di ricchezza (in migliaia di Euro) derivanti tempo per tempo dal processo stocastico e nell'asse delle ascisse ci sarà il tempo. Il colore di ogni quadratino indicherà ad ogni istante temporale il portafoglio scelto all'interno della frontiera che massimizza l'utilità attesa dell'investitore; la probabilità di realizzare gli obiettivi è anch'essa massimizzata e deriva dalla funzione valore: ognuno di questi quadratini si porta dietro quindi le informazioni del portafoglio consigliato utile per colpire gli obiettivi futuri dato il livello di ricchezza raggiunto. Più il livello di ricchezza nell'istante futuro posseduto dal cliente sarà alto più il portafoglio ribilanciato secondo le caratteristiche del cliente tenderà ad essere meno rischioso poiché già disporrà della ricchezza necessaria a centrare gli obiettivi. Nel grafico i portafogli più rischiosi sono quelli con un colore blu scuro.
Il grafico sopra aiuterà il Consulente nel dialogo con l'investitore perché dimostrerà come possa evolvere la rischiosità del suo investimento in base al livello di ricchezza raggiunto al tempo e gli obiettivi segnalati.
In ogni istante temporale è possibile definire la probabilità di raggiungere tutti gli obiettivi (inclusi quelli parziali) e qualsiasi tipo di combinazione degli stessi dato il livello di ricchezza e il portafoglio di investimento che ne massimizzi questa probabilità.
Per determinare la distribuzione di probabilità della ricchezza dell'investitore nei tempi futuri, vengono determinate le probabilità di transizione e le informazioni sulla strategia ottimale, $k_{i,t}$ e $l_{i,t}$ dall'equazione di Bellman per far evolvere la distribuzione di probabilità in avanti nel tempo, a partire da t = 0, quindi t = 1, e terminando con t = T -1.
Più nel dettaglio, al t=0 definiamo i_0 così da ottenere W_{i_0} risultante la ricchezza iniziale W(0) e, quindi, $p(W_{i_0}(0)) = 1$. Settiamo le restanti probabilità al tempo 0 come $p(W_i(0)) = 0$ per ogni $i \neq i_0$.

$$\boldsymbol{p(W_j(t+1)) = \sum_{J=1}^{imax} q(W_j(t+1)|W_i(t), c_{k_{i,t}}(t), \mu_{l_{i,t}}) * p(W_i(t))} \qquad \text{[Eq. 21]}$$

Impostiamo quindi t = 1 nell'equazione sopra e la eseguiamo nuovamente per ogni $j = 1,2\ldots i_{max}$ continuando in questo modo fino ad arrivare al caso t = T -1. Questo restituisce la distribuzione di probabilità per ogni punto della griglia della ricchezza in ogni periodo di tempo del portafoglio.
Sviluppando tutta l'ottimizzazione dinamica è possibile all'istante zero e con un livello di ricchezza $W(\mathbf{0})$ indicato dal cliente individuare che il raggiungimento dell'obiettivo in maniera probabilistica, ad ogni tempo.
Considerata la rischiosità iniziale, la ricchezza investita ($W(\mathbf{0}) = \mathbf{100.000}\ \boldsymbol{Euro}$), il cliente selezionato ha dunque le probabilità[24] di raggiungere i 4 obiettivi due e l'obiettivo uno indicate dalla seguente tabella.

---

[23] Con la dimensione di massimizzazione "l" intendiamo la coppia di (media,varianza) di uno dei portafogli ottenuti nella frontiera efficiente CVaR funzione dei parametri risk aversion, reflection e loss aversion del cliente trattati nei paragrafi precedenti. Facciamo attenzione che la matrice $V(W_i(t))$ che otterremo sarà multidimensionale ($WxWxCx\mu$) da cui vorremmo andare a scegliere il valore maggiore di $V(W_i(t))$ per ogni tempo dati i costi e la coppia di media varianza del portafoglio.
[24]Una volta calcolata questa distribuzione di probabilità della ricchezza, possiamo determinare la probabilità di raggiungere qualsiasi obiettivo specifico, completo o parziale, in un dato momento t: In ogni momento t per ogni $k = 1,2\ldots k_{max}(t)$, sommiamo $p(W_i(t))$ su ogni i dove $W_{i,t} = k$. Questo dà la probabilità che venga scelta ciascuna componente k nei vettori costo/utilità. Una volta che questo è noto, i vettori costo/utilità vengono

Figura 7: Andamento della ricchezza investita

Wealth/ Time	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10
74,88	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
79,34	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
84,07	15	14	11	15	15	15	15	15	15	15
89,07	15	11	9	11	15	15	15	15	15	15
94,38	15	9	7	9	15	15	15	15	15	15
100,00	15	8	6	7	15	15	15	15	15	15
105,96	15	7	5	6	11	15	15	15	15	15
112,27	15	6	4	5	9	11	15	15	15	15
118,95	15	5	3	4	7	9	15	15	15	15
126,04	15	4	2	3	6	7	15	15	15	15
133,55	15	8	6	2	5	6	11	15	15	15
141,50	15	10	7	6	4	5	9	11	11	11
149,93	15	12	9	7	3	4	7	9	9	9
158,86	15	10	11	9	2	3	6	7	7	7
168,32	15	10	10	11	6	2	5	6	6	6
178,34	12	8	10	10	7	6	4	5	5	5
188,97	10	8	8	10	9	7	3	4	5	4
200,22	10	8	8	8	11	9	2	3	5	3
212,15	10	8	8	8	13	11	6	2	6	2
224,78	8	6	8	8	15	13	7	6	8	6
238,17	8	6	6	8	15	15	9	7	8	10
252,36	8	6	6	6	14	15	11	9	8	12
267,39	8	5	6	6	13	14	13	11	8	15
283,31	8	4	5	6	13	13	15	13	13	15
300,19	8	3	4	6	12	13	15	15	13	15
318,07	8	3	3	5	11	12	14	15	12	12
337,01	6	3	3	4	11	11	13	14	8	10
357,09	6	3	3	3	10	11	12	13	6	8
378,35	6	3	3	3	10	10	10	8	5	8
400,89	6	3	3	3	10	10	10	6	5	6
424,77	5	3	3	3	10	10	8	5	5	5
450,07	4	3	3	3	10	10	6	5	4	5
476,87	3	2	3	3	9	10	5	5	4	5
505,28	2	2	2	3	8	9	5	4	3	4
535,37	2	2	2	3	7	8	5	4	3	4
567,26	2	2	2	2	6	7	4	3	3	4
601,04	2	2	2	2	6	6	4	3	3	4
636,84	1	2	2	2	5	6	3	3	2	3
674,77	1	1	2	2	5	5	3	3	2	3
714,96	1	1	1	2	4	5	3	2	2	3
757,55	1	1	1	2	4	4	3	2	2	3
802,67	1	1	1	1	4	4	2	2	1	3
850,48	1	1	1	1	4	4	2	2	1	2
901,13	1	1	1	1	3	4	2	1	1	1
954,80	1	1	1	1	3	3	2	1	1	1
1011,67	1	1	1	1	3	2	1	1	1	1
1071,93	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1
1067,65	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1

Tabella 8: Probabilità associate ad obiettivi

$u_{1,5}$	$u_{2,5}$	$u_{1,10}$	$u_{2,10}$	P{fullfill t=5 goal,c 120.000}	P{fullfill t=5 goal,c 130.000}}	P{fullfill t=10 goal,c 160.000}}	P{fullfill t=10 goal,c 180.000}}
1.000	5.000	3.000	10.000	8,1%	15,1%	11,62%	34,56%

Possiamo dedurre che dato il rischio massimo sopportabile dall'investitore (da cui derivano gli asset mix di portafogli) e data la ricchezza iniziale unita alle priorità (utilità) attribuite ex-ante, risulterà un'alta probabilità di ottenere l'università migliore, con conseguente riduzione delle probabilità di acquisto della macchina in entrambi gli obiettivi. Potremmo ottenere il valore di utilità totale attesa ottimale $E[u] = V(W_{i0}(0))$ = 4642 dell'investitore. Tale risultato è uguale al prodotto scalare del vettore delle utilità con il vettore della probabilità. Qualora l'investitore non fosse soddisfatto del grado di raggiungimento degli obiettivi in ottica probabilistica, è possibile incrementare la probabilità di raggiungimento dell'obiettivo desiderato in 3 differenti modi non per forza alternativi:

a) Concordare una utilità maggiore all'obiettivo desiderato
b) Aumentare il capitale iniziale W(0) = 100.000 Euro
c) Introdurre del denaro (inflows) periodico all'interno degli investimenti

In breve, riposizionando le utilità come indicato nella tabella seguente, troviamo aumentate le probabilità (a parità di capitale investito iniziale) di ottenere obiettivi differenti, ma purtroppo, data la rischiosità che il cliente può sostenere, non possiamo ottenere risultati migliori se non con l'aumento del capitale iniziale.

Tabella 9: Sensitivity su probabilità di accadimento

$u_{1,5}$	$u_{2,5}$	$u_{1,10}$	$u_{2,10}$	P{fullfill t=5 goal,c 120.000}	P{fullfill t=5 goal,c 130.000}}	P{fullfill t=10 goal,c 160.000}}	P{fullfill t=10 goal,c 180.000}}
1.000	5.000	3.000	10.000	8,1%	15,1%	11,62%	34,56%
1.000	2.000	100	20.000	6,2%	3,15%	7,10%	38,90%

Nella tabella sopra si è condotto un ulteriore esempio sulla formulazione dei 2 obiettivi (4 se consideriamo i 2 parziali) ipotizzando un'allocazione dell'utilità che il cliente, ex-ante, attribuisce agli obiettivi. Qualora il cliente attribuisca un po' più di priorità (in termini di utilità) all'obiettivo di una Università più prestigiosa sovrappesandola rispetto a quella "meno prestigiosa", otteniamo un innalzamento della probabilità di raggiungimento di questo obiettivo con una riduzione sostanziale delle probabilità di realizzo rispetto all'acquisto di una macchina performante. E' logico che, qualora l'investitore non fosse ancora soddisfatto della probabilità ottenuta, occorrerà allora rivedere il mix di utilità attribuito o di aumentare gli investimenti iniziali anche in ottica di conoscenza della sua ricchezza patrimoniale.

ricollegati ai loro obiettivi originari e alla probabilità che ogni obiettivo totale o parziale sarà raggiunto è determinato sommando i componenti connesse a quell'obiettivo totale o parziale.

4.3.3. Problema di ottimizzazione statica: l'Efficient Global Probability Erontier (EGPF)

Proviamo adesso a semplificare l'esercizio precedente introducendo un problema "statico" basato sulla definizione di obiettivi ed investimenti coerenti con il rischio del cliente. Dall'esercizio precedente abbiamo appreso come il cliente può lavorare sulla "utilità" di ogni obiettivo, influenzando la probabilità di raggiungimento degli stessi. Qualora ad esempio il cliente avesse due soli obiettivi e nessuna scelta "parziale" (siamo nel caso di due obiettivi "All or nothing"), potremmo trovarci a gestire una situazione come quella della tabella in basso.

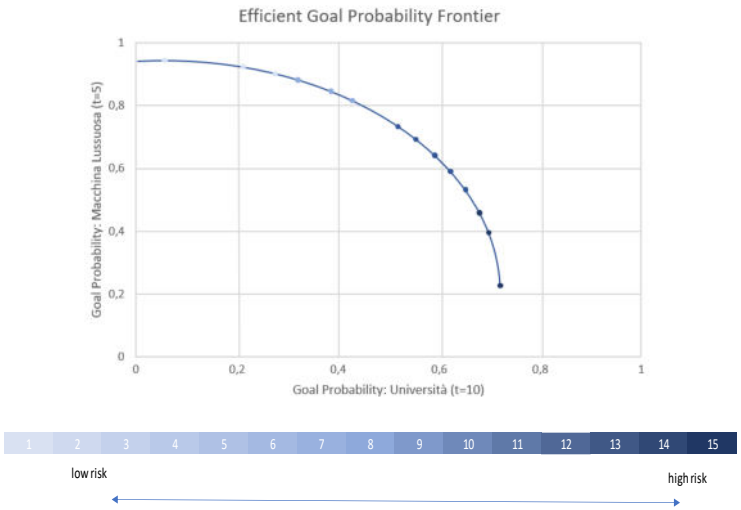
Tabella 10: Obiettivi su ottimizzazione statica

Obiettivi

Tempo	*t=5*	*t=10*
Costo	120.000,00 €	180.000,00 €
Utilità	1.000	10.000

In questo caso abbiamo deciso di semplificare ponendo un obiettivo a t=5 (cambiare l'autovettura) e a t=10 (pagamento delle tasse Universitarie). Non ci sono "seconde scelte". Poniamo anche come p_1 la probabilità di raggiungimento dell'obiettivo al t=5 (acquisto nuova autovettura) e p_2 probabilità di raggiungimento dell'obiettivo al t=10 (pagamento retta Universitaria). Troviamo abbastanza difficile poter parlare al cliente in termini di utilità per ogni obiettivo, ma possiamo però semplificare questo passaggio sviluppando una frontiera che possa riportare le probabilità di raggiungimento degli obiettivi e il portafoglio che realisticamente aiuta a raggiungerli. Ipotizzando di essere al tempo iniziale (t=0) e di non poter cambiare l'allocazione per i restanti anni, possiamo reiterando l'algoritmo visto nella sezione precedente ottenere, per ogni portafoglio tra i 15 proposti e per più funzioni di utilità, una "frontiera Pareto efficiente" che riporterà le coppie di probabilità (p_1 e p_2) ottenibili con l'investimento iniziale e con livelli di utilità differenti. Per ogni coppia è possibile ottenere il portafoglio di investimento che, utilizzato e mantenuto nel tempo, possa raggiungere quella probabilità di ottenimento degli obiettivi. Vige sempre la convenzione che il portafoglio più scuro è quello più rischioso secondo la frontiera individuata nella figura in cui viene presentata la l'EGPF, Efficient Goal Probability Frontier.

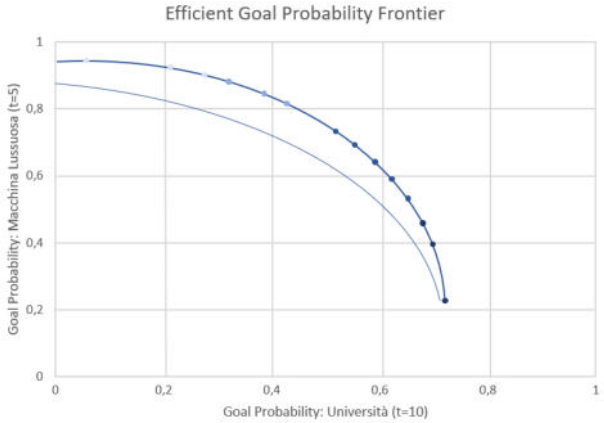
Figura 8: Efficient Goal Probability Frontier



Appuntiamo le seguenti proprietà della probabilità di goal della frontiera efficiente (EGPF):

1. Per due obiettivi, l'EGPF è una curva. Per n gol, il EGPF è un'iper-superficie (n - 1) dimensionale.
2. Ogni punto sull'EGPF è mappato su un insieme di pesi di utilità che riflettono la relativa importanza di ciascun obiettivo per l'investitore.
3. Dietro ogni punto dell'EGPF ci sono due strategie ottimizzate:a) una strategia di investimento ottimizzata e b) una strategia ottimizzata per raggiungere gli obiettivi. Ciò che è fondamentale qui è che l'EGPF sia dichiarato rigorosamente in termini di probabilità, non in termini di utilità, così l'investitore è in grado di specificare le proprie preferenze. Dalla parte degli investitori è molto più facile comprendere l'idea di poter scegliere l'allocazione partendo dalla probabilità di realizzazione degli obiettivi. Se l'investitore può dedicare più denaro all'investimento iniziale, possiamo trovare l'investimento iniziale minimo necessario per ottenere il punto di probabilità dell'obiettivo desiderato. Questo consente all'investitore di non spendere né in eccesso né in difetto per ottenere le probabilità di goal desiderate. In alternativa, l'investitore potrebbe non essere in grado di accedere inizialmente ad ulteriore denaro, ma potrebbe invece essere in grado di contribuire nel tempo. In questo caso, il metodo per determinare l'investimento iniziale minimo aggiuntivo può essere facilmente modificato per determinare invece gli ingressi minimi monetari nel tempo al fine di ottenere la desiderata probabilità sull'obiettivo.
Ipotizzando infatti un inflow periodico del 2% sul capitale iniziale (può essere equivalente agli incassi dei dividendi sugli investimenti e, in qualche modo, abbattendo l'inflazione stimata in esercizio), potremmo ottenere una nuova EGPF dove infatti si verifica l'aumento delle probabilità di ottenimento dei due obiettivi. Aumentano allora le probabilità di ottenere l'obiettivo 1 (la macchina lussuosa) e le probabilità legate al pagamento della retta diminuendo la rischiosità del portafoglio iniziale stimata per le coppie di probabilità ricercate.

Figura 9: Inflows su EGPF



5. Conclusioni

Il legame tra questionario Mifid e RAF, contrariamente a quanto si possa pensare, è particolarmente importante per l'intermediario finanziario, specializzato nel servizio di wealth management per clientela private banking, HNWI e UHNWI. Questo risulta sia in un'ottica di gestione del rischio del balance sheet risk che nell'ottica di una value proposition di livello del servizio stesso di wealth management, in cui il cliente benefici di un processo di gestione del rischio integrato nel wealth planning e nelle scelte di asset management che mostri in maniera trasparente il raggiungimento degli obiettivi finanziari definiti nel tempo e relative probabilità di possibile successo. Soprattutto è particolarmente importante per i clienti del segmento private banking ed HNWI – estendibile a quella UHNWI, dove la frase "I don't like risk, but i like win" trova un forte fondamento al fine di esprimere la funzione di utilità attesa e nel sostenere il concetto che il risk-taking è un lusso così come identificato dal livello della misura dell'SLR complementare a quella della discretionary wealth ratio in cui peso importante è espresso dal valore attuale dello human capital e del valore attuale degli obiettivi finanziari qualitativamente e quantitativamente identificati. È necessario quindi richiedere una maggiore quantità e qualità dei dati del cliente rispetto a quelli richiesti dal questionario mifid e loro costante monitoraggio nel tempo che permettono di poter modificare quanto fin a quel momento fissato in termini di obiettivi finanziari. Output parziale è costituito da un financial statement del cliente che possa definire non solo la misura di SLR ma che permetta, in ogni momento, di poter accertare profili di stabilità, solvibilità e liquidità del cliente. Punto iniziale è la determinazione delle tre dimensioni dell'utilità attesa, risk aversion, loss aversion e reflection, attraverso opportuni schemi d'indagine (lottery-style technique) al fine di determinare i pesi del portafoglio d'investimento ove gli obiettivi finanziari sono legati ad un valore d'utilità e quindi siano ordinabili per livello di priorità. In una logica reverse engineering è possibile chiedere al cliente le probabilità di successo dell'obiettivo finanziario. A questo punto, a seconda del valore dell'SLR, del profilo di rischio determinato dalle tre dimensioni dell'utilità attesa e dagli obiettivi sarà possibile poter consigliare al cliente non solo il portafoglio d'investimento coerente che esprima le probabilità di successo lato obiettivi finanziari ma anche le possibili azioni in termini di financial statement, incluse attività di ottimizzazione fiscale e non solo laddove possibili. Tutto ciò assieme all'implementazione delle best practices in termini di metodologie e di misurazione del rischio (VaR & Conditional VaR), incluse quelle relative al correlation risk. Quanto sinora affermato è coerente con l'idea di determinare un risk appetite framework "personale" che in termini di risk appetite statement sia time varying a seconda dello svilupparsi della propria vita finanziaria. Ciò, in parte gestito da relationship manager che dovranno necessariamente potenziare le loro capacità tecniche e relazionali al fine di poter ottenere quel know-how necessario.

Bibliografia

R. Bellman "On the Theory of Dynamic Programming" Proceedings of the National Academy of Sciences, 1952

D. M. Berns, PhD "Modern Asset Allocation for Wealth Management" Wiley, 2020

J. Brunel "Goals-Based Wealth Management: An Integrated and Practical Approach to Changing the Structure of Wealth Advisory Practices", Wiley, 2015

A.Consiglio, F. Cocco, S. Zenios "Scenario optimization asset and liability modelling for individual investors. Annals of Operations Research 152, Springer, 2007

Ernst & Young "Risk Appetite Framework - Basilea 3: risks and supervision 2014 " – Materiali Convegno, 2014

ECB Banking Supervision "SSM Supervision on governance and risk appetite", 2016

S.R. Das, D. Ostrov, A. Radhakrishnan, D. Srivastav "Dynamic Optimization for Multi-Goals Wealth Management" Journal of Banking and Finance, 2021

S.R. Das, D. Ostrov, A. Radhakrishnan, D. Srivastav "Dynamic Portfolio Allocation in Goals-Based Wealth Management" Computational Management Science, 2020

S.R. Das, D. Ostrov, A. Radhakrishnan e D. Srivastav "Efficient Goal Probabilities: A New Frontier", Journal of Investment Management, 2023

Kahneman, D. and A. Tversky (1979). Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk, 1979

S.R. Das, H. Markowitz, J. Scheid, and M. Statman "Portfolio Optimization with Mental Accounts", Journal of Financial and Quantitative Analysis, 2010

S.R. Das, D. Ostrov, A. Radhakrishnan, and D. Srivastav "Goals-Based Wealth Management: A New Approach", Journal of Investment Management, 2018

K. Dowd, "Measuring Market Risk" 2nd Ed. , Wiley, 2005

P.S. Hagan, D. Kumar, A.S. Lesniewski, D.E. Woodward "Managing Smile Risk" Wilmott Magazine, 2002

P. Jorion "Value at Risk: the new benchmark for managing financial risk" 3rd Ed, 2007

Markowitz, H. H. "Portfolio Selection", Journal of Finance, 1952

G. Meissner "Correlation Risk Modeling and Management" Wiley, 2014

R.T. Rockafellar, S. Uryasev "Optimization of Conditional Value-at-Risk" Journal of Risk, Spring, 2000